Bernhard Eisvogel

Aus der Reihe: e-fellows.net stipendiaten-wissen

e-fellows.net (Hrsg.)

Band 0

Verkehrsflussmodellierung mithilfe des Lighthill-Whitham-Richards und Aw-Rascle-Zhang Modells. Einführung in die Theorie hyperbolischer Erhaltungsgleichungen

Bachelorarbeit

e-fellows.net
stipendiaten-wissen

BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT

- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit

- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops

- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei www.GRIN.com hochladen und kostenlos publizieren

GRIN

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Dieses Werk sowie alle darin enthaltenen einzelnen Beiträge und Abbildungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsschutz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlages. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen, Auswertungen durch Datenbanken und für die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme. Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe (einschließlich Mikrokopie) sowie der Auswertung durch Datenbanken oder ähnliche Einrichtungen, vorbehalten.

Impressum:

Copyright © 2023 GRIN Verlag
ISBN: 9783963569135

Dieses Buch bei GRIN:

https://www.grin.com/document/1453203

Bernhard Eisvogel

Aus der Reihe: e-fellows.net stipendiaten-wissen

e-fellows.net (Hrsg.)

Band 0

Verkehrsflussmodellierung mithilfe des Lighthill-Whitham-Richards und Aw-Rascle-Zhang Modells. Einführung in die Theorie hyperbolischer Erhaltungsgleichungen

GRIN Verlag

GRIN - Your knowledge has value

Der GRIN Verlag publiziert seit 1998 wissenschaftliche Arbeiten von Studenten, Hochschullehrern und anderen Akademikern als eBook und gedrucktes Buch. Die Verlagswebsite www.grin.com ist die ideale Plattform zur Veröffentlichung von Hausarbeiten, Abschlussarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen, Dissertationen und Fachbüchern.

Besuchen Sie uns im Internet:

http://www.grin.com/

http://www.facebook.com/grincom

http://www.twitter.com/grin_com

Verkehrsflussmodellierung mit Hilfe des Lighthill-Whitham-Richards und Aw-Rascle-Zhang Modells

1. März 2024

Zusammenfassung

Vorstellung des Lighthill-Whitham-Richards und des Aw-Rascle-Zhang Modells zur Staumodellierung und Vorstellung einiger der zur Analyse von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen benötigten mathematischen Grundlagen.

Bachelorarbeit an der Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **3**

2 Lighthill-Whitham-Richards(LWR) Modell **3**
2.1 Herleitung des LWR Modells 4
2.2 Entropielösungen 10
2.3 Existenz von Lösungen 12
2.4 Ampelproblem 14
2.5 Fehler des Modells 18

3 Intermezzo zu linearen hyperbolischen Systemen **18**

4 Aw-Rascle-Zhang(ARZ) Model **21**
4.1 Herleitung des ARZ Modells 22
4.2 Untersuchung des ARZ Modells 24
4.3 Das Riemannproblem für das ARZ-Modell 29
4.4 Kommentar zur Numerischen Approximation 31
4.5 Fehler des ARZ Modells 32
4.6 Jamitons 33

5 Abschluss **33**

6 Anhang **34**
6.1 Code 34
6.2 Kleine Lemmata 34

Literatur **35**

1 Motivation

Möchte man effektive Verkehrsleitsysteme, Stauprognosen oder effiziente Ampelsteuerungen entwerfen, muss man diese quantitativ untersuchen können und daher in einem mathematischen Modell erfassen.
In dieser Arbeit wird anhand der Vorstellung des LWR- und ARZ- Modells ein kurzer Einblick in die Theorie der Stau- und Verkehrsmodellierung mit hyperbolischen Erhaltungsgleichungen geben und die dafür benötigten mathematischen Werkzeuge vorgestellt. Der Wert dieser Arbeit besteht darin, bestehende Grundlagen der Theorie der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen einzuführen, einige der wichtigsten Aufsätze mit ihren Ideen vorzustellen und so neugierigen Menschen eine Einführung zu geben die ihnen ermöglichen neue Aufsätze in diesem Bereich zu verstehen.

Grundsätzlich lässt sich das Gebiet der Verkehrsflussmodelle in 4 Kategorien unterteilen:

1. Mikroskopische Modelle: Hier werden nur individuelle Fahrzeuge betrachtet. Als Beispiel seien "Follow-The-Leader" [5]- und "Optimal Velocity"-Modelle [6] genannt.

2. Mesoskopische Modelle: In diesen Fall werden Gruppen von Autos betrachten.

3. Makroskopische Modelle: Es werden keine individuellen Fahrzeuge, sondern nur die Dichte des Verkehrs betrachtet. Bekannte Beispiele hierfür sind das Payne-Whitham, Aw-Rascle-Zhang(ARZ) oder das Lighthill-Whitham-Richard(LWR) Modell.

4. Hybride Modelle, die Konzepte aus mehr als einer Gruppe vereinigen, wie in Burghout et. a. [7].

Es ist nicht sinnvoll, bei großen Mengen an Fahrzeugen mikroskopische Modelle anzuwenden, da eine sehr große Rechenleistung zur Lösung der Modelle benötigt wird. Diese Arbeit beschränkt sich daher auf die Untersuchung von zwei speziellen makroskopischen Modellen: dem Lighthill-Withham-Richards Modell und dem Aw-Rascle-Zhang Modell, die beide auf einem hyperbolischem System beruhen.
In Sektion 2 wird das wahrscheinlich berühmteste Modell zur Modellierung von Staus vorgestellt, und im Zuge dessen auf die verschiedenen Stoßstrukturen und Entropietheorien eingegangen. Danach wird dieses Modell numerisch untersuchen, und die strukturellen Fehler vorgestellt, sowie gezeigt, wie man damit einen Rückstau beschreiben kann.
Dieses erstes Modell beachtet aber nicht die natürliche Verzögerung, mit der eine veränderte Verkehrssituation das Fahrverhalten beeinflusst. Daher wird in Sektion 4 ein verbessertes Modell qualitativ herleiten, untersucht und dabei generell auf einige Eigenschaften von hyperbolischen Erhaltungssystemen eingegangen[1].
Damit der Sprung zwischen dem ersten und dem zweiten Modell nicht zu groß wird, gibt es in Sektion 3 einige kurze Überlegungen zu Systemen von Erhaltungsgleichungen. Danach wird die Arbeit mit Sektion 5 abgeschlossen.

2 Lighthill-Whitham-Richards(LWR) Modell

Man betrachte zuerst ein möglichst einfaches Modell einer Straße und gehe dafür davon aus, dass die Fahrzeuge auf einer unendlich langen Strecke alle in die gleiche Richtung fahren, es keinen Gegenverkehr gibt, sonst keinerlei externe Hindernisse oder Anreize, zur Geschwindigkeitsreduktion existieren und es vor allem keine Ein- oder Ausfahrten gibt. Man bezeichne mit $\rho(x,t)$ die Dichte des Verkehrs, also die Anzahl der Fahrzeuge pro Streckeneinheit, mit $q(x,t)$ den Verkehrsfluss (also die Veränderung

[1] Englisch: hyperbolic systems of conservation laws

der Anzahl der Fahrzeuge für ein Streckenintervall pro Zeitintervall) und mit $v(x,t)$ die Geschwindigkeit der Fahrzeuge jeweils im Punkt x zur Zeit t. Außerdem bezeichnen wir mit $v_{\max}$ die Maximalgeschwindigkeit der Fahrzeuge auf der Straße und mit ρ_{max} die maximale Dichte der Fahrzeuge, d.h. die Menge der Fahrzeuge pro Strecke, falls sie beinahe mit den Stoßstangen aneinander stehen.

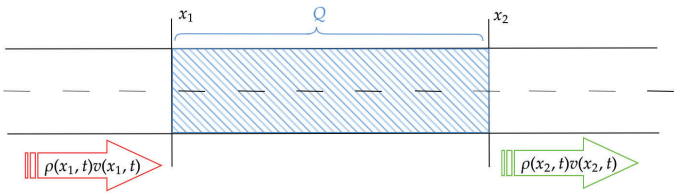


Abbildung 1: Herleitung Konservationsgleichung

2.1 Herleitung des LWR Modells

Für die Herleitung des Modells wollen wir uns an [12] orientieren. Anfangs wollen wir die Tatsache modellieren, dass auf einer Straße keine Fahrzeuge verschwinden oder erzeugt werden, d.h. es gibt keine Ein- oder Ausfahrten. Außerdem gehen wir davon aus, dass die physikalischen Eigenschaften und Fahrgewohnheiten der Fahrer alle homogen sind.
Es gilt also die Anzahl der Fahrzeuge Q im blauen Bereich $[x_1, x_2]$ in Abb. 1 mit Hilfe der Dichte ausdrücken:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dt.$$

Wir wissen ebenfalls über $\frac{d}{dt}Q$, dass es von den in den Abschnitt einfahrenden und ausfahrenden Fahrzeugen beeinflusst wird. Wir kommen zu:

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dt = \rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t).$$

Nach Integration über t und aufgrund der Beschränktheit von ρ folgt:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dt}\rho(x,t)dt &= \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t)dt \\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(\rho(x,t)v(x,t))dxdt.\end{aligned}$$

Da x_1, x_2, t_1, t_2 beliebig waren folgt:

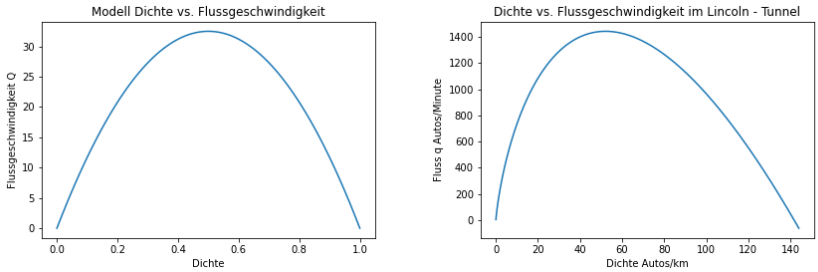
$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \tag{2.1}$$

Aus der Beobachtung von Verkehrssituation und unserem eigenem Fahrverhalten lässt sich erkennen, dass die Fahrzeuggeschwindigkeit hauptsächlich von der Dichte des Verkehrs abhängig ist, d.h. Fahrzeuge fahren bei einer höheren Dichte langsamer. Wir gehen also in unserem Modell davon aus, dass es eine stetige Funktion v_e gibt, die einer bestimmten Dichte die angestrebte Geschwindigkeit eines Fahrzeuges zuordnet. Diese sei für alle Fahrzeuge und zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort gleich, und habe außerdem die Eigenschaft, dass $v_e(0) = v_{max}$ und $f(\rho_{max}) = 0$, d.h. die angestrebte Geschwindigkeit ist bei einer leeren Fahrstraße gleich der Maximalgeschwindigkeit und bei der maximalen Dichte gleich 0 (d.h. wenn die Fahrzeuge sich beinahe mit den Stoßstangen berühren).

Außerdem gibt es Sinn, diese Funktion als monoton sinkend vorauszusetzen, also $v_e' < 0$, da wir bei steigenden Dichten eine sinkende angestrebte Geschwindigkeit erwarten.

Wir definieren jetzt die Funktion f als Verkehrsfluss mit dieser angestrebten Geschwindigkeit, also

$$f(\rho) = \rho v_e(\rho)$$



(a) idealisierter Zusammenhang wie in 2.3

(b) $f(x) = 27.7x \log(141/x)$, Messwerte [9]

Abbildung 2: Fundamentaler Zusammenhang

Für diese Funktion f gibt es reale Daten, die um 1959 von Greenberg am Lincolntunnel in New York City gemessen wurden [14] und in Abb. 2.1 visualisiert sind. Es sei jedoch bemerkt, dass der Unterschied des Fahrverhaltens in einem Tunnel sicherlich von dem auf einer offenen Straße abweicht, diese Unterschiede aber hier vernachlässigbar sind, da unsere Theorie auf viel allgemeinere Funktionen mit $f'' > 0$ oder $f'' < 0$ angewendet werden kann.
Zur Vereinfachung approximieren wir diese gemessene Funktion f mit Hilfe der prototypischen Formel 2.2 für die Verkehrsequilibriumsgeschwindigkeit v_e:

$$v_e = v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}). \tag{2.2}$$

In Abbildung und ist der vernachlässigbare Unterschied dieser zwei Funktionen visualisiert. Wir erhalten insgesamt für unseren angenommen Zusammenhang zwischen ρ und dem Verkehrsfluss:

$$f_1(\rho(x,t)) := \rho(x,t) v_{max} \left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}}.\right) \tag{2.3}$$

Wenn wir jetzt den vereinfachten Zusammenhang zwischen der Dichte und dem Verkehrsfluss f für 2.1 um Anfangsdaten ergänzen, ergibt sich ein Anfangswertproblem, das wir LWR-Modell für die Anfangsdaten u_0 nennen.

2.1 Definition (klassische Lösung)**.** Wir nennen eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ eine klassische Lösung des LWR Modells, falls sie folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Bemerkung. Die eben genannte Differentialgleichung 2.4 entspricht für $f(x) = \frac{x^2}{2}$ der reibungslosen Burgersungleichung[2].

Bei unserer Herleitung sind wir davon ausgegangen, dass das Fahrverhalten und die physikalischen Eigenschaften der Fahrzeuge gleichmäßig ist.
Tatsächlich ist das nicht notwendig, wie in [11] mit einem stochastischen mikroskopischen Modell gezeigt wird, das ebenfalls gegen dass LWR-Modell konvergiert.

[2] nach Johannes Martinus Burgers; Die Burgersungleichung kann wegen ihrer Ähnlichkeit zu den Navier Stokes Gleichungen als vereinfachte Strömgsgleichung interpretieren werden, sonst wird die Gleichung wegen dem Auftreten nichtlinearer Phänomene zum Testen von numerischen Methoden benutzt. Mit der Hopf-Cole Transformation kann man die viskose Version auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen

2.3 Bemerkung. Wir nennen ein Gleichungssystem der Form 2.4 hyperbolisch, falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ∇f diagonalisierbar ist und nur reelle Eigenwerte besitzt.

Um die Notation zu vereinheitlichen skalieren wir das Modell so, dass $u = 1$ einer leeren Straße entspricht, und $u = -1$ einem Stau, der durch $\rho = \rho_{max}$ charakterisiert ist.
Wir setzen also

$$u := 1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}} \iff \rho = \frac{\rho_{max}}{2}(1-u) \quad x_s := \frac{x}{L} \quad t_s := \frac{t}{\tau}$$

mit $L/\tau = v_{max}$ und erhalten:

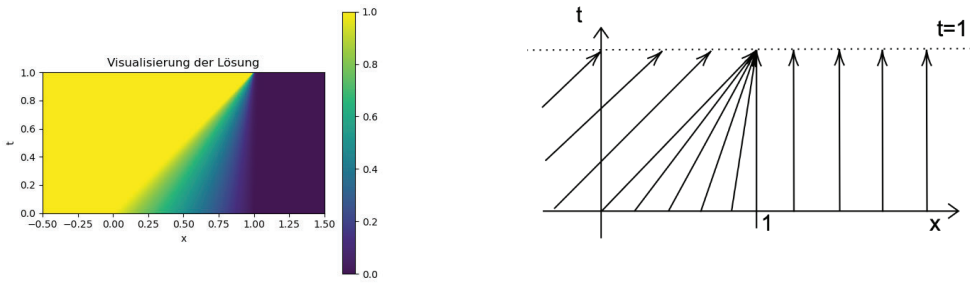
$$\begin{aligned}\partial_t \rho + f_1(\rho)_x &= -\frac{\rho_{max}}{2\tau}\partial_{t_s} u + \frac{1}{L}\partial_{x_s}\left(v_{max}\frac{\partial \rho_{max}}{2}(u-1)\frac{1}{2}(1-u)\right) \\ &= -\frac{\rho_{max}}{2\tau}\partial_{t_s} u - \frac{\rho_{max}}{2\tau}\partial_{x_s}\left(\frac{u^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist also, wenn wir die Verkehrsflussfunktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$, betrachten äquivalent zu 2.4 und wir betrachten daher ab jetzt das LWR-Modell immer mit dieser Funktion.
Wenn wir einige Lösungen des LWR-Modells betrachten, gibt es z.B. für die Anfangswerte 2.5

$$u^0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0 \\ 1 - x & : 0 \le x < 1 \\ 0 & : x \ge 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

die Lösung:

$$u^1(x,t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ 1 - \frac{x-t}{1-t} & : t \le x < 1 \\ 0 & : x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times [0,1).$$



(a) Werte (b) Charakteristiken

Abbildung 3: Visualisierung der Dichte einer Lösung des LWR Modells 2.1 mit den Anfangsdaten u^0. Das numerische Verfahren für die Visualisierung wird in Abschnitt 2.3 vorgestellt

2.4 Lemma. *Es handelt sich bei u_1 um die eindeutige Lösung in C^1 des Problems 2.4 mit den Anfangsdaten u^0 und $f(t,x) = \frac{x^2}{2}$.*

Beweis: Es ist klar, dass $u^0(x) = u_1(x,0)$ und die Aussage für $x < t$ und $x \ge 1-t$ gilt. Sei jetzt $x \in [t, 1-t)$:

$$u_t^1 + u^1 u_x^1 = \frac{1-x}{(1-t)^2} + \frac{1-x}{1-t}\frac{-1}{1-t} = 0.$$

Wenn wir jetzt eine Lösung für spezielle Anfangsdaten suchen können wir damit anfangen, die Charakteristik zu betrachten. Es ist sehr wichtig die Charakteristiken von den Fahrstrecken der einzelnen Autos zu unterscheiden. Charakteristiken zeigen besser die Dynamik von Verkehrssituationen.

2.5 Definition (Charakteristik)**.** Eine differenzierbare Funktion $\chi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ wird Charakteristik von 2.4 zu x_0 genannt, falls auf ihr jede klassische Lösung u konstant ist, also $u(\chi(t)) \equiv cnst.$ und $u(\chi(0)) = x_0$, oder

$$\frac{d}{dt} u(\chi(t), t) = 0 \quad \chi(0) = x_0.$$

2.6 Lemma. *Eine differenzierbare Funktion $\chi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine Charakteristik von 2.4 genau dann, wenn mit $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion χ folgendes AWP löst:*

$$\chi(0) = x_0 \quad \chi'(t) = f'(u(\chi(t), t))$$

Beweis: Da χ auf jeder Lösung konstant ist und u eine Lösung ist gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= u_t(\chi(t), t) + u_x(\chi(t), t)\chi'(t) \\ \iff u_x(\chi(t), t)\chi'(t) &= f(u(\chi(t), t))_x \\ \iff \chi'(t) &= f'(u(\chi(t), t)) \end{aligned}$$

Es stellt sich die Frage, welchen Zustand unsere modellierte Straße annimmt, falls $t > 1$, da dort die Lösungsfunktion ja nicht wohldefiniert sein kann. Außer aus unser numerischen Situation in Abb. 3a genauso wie an der theoretischen Überlegung in Abb. 3b sehen wir, dass sich zwei Charakteristiken in $(1, 1)$ schneiden, es ab diesem Punkt also keine stetige Lösung geben kann. Um die Frage zu lösen, wie wir eine Aussage trotz Unstetigkeiten treffen können fassen wir unser Problem erst allgemeiner und führen schwache Lösungen ein., die Unstetigkeiten erlauben. Die Eindeutigkeit dieser Lösung folgt aus der Theorie der Charakteristiken, die ebenfalls gleich eingeführt wird.

2.7 Definition (Schwache Lösung)**.** Eine Funktion $f \in$ heißt schwache Lösung der Gleichung 2.4, falls für alle $\psi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x, 0) dt$$

gilt.

In unserem Fall sind die Charakteristiken des LWR-Modells durch den Anfangswert bestimmt, also die Charakteristik von 2.4 zu x_0 ist durch

$$\chi(t) = x_0 + t u_0(x_0).$$

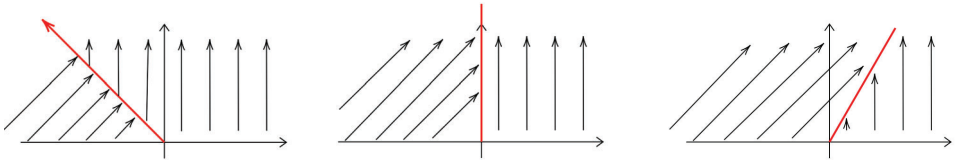
gegeben.
Wir können jetzt wieder zum Problem 2.5 zurückkehren und uns die Charakteristiken zu den Startwerten $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ansehen.
Diese sind

$$\chi_0(t) = 0 + t \qquad \chi_1(t) = 1$$

es gilt $\chi_0(1) = \chi_1(1)$, an der Stelle $(1, 1)$ muss also unsere Lösungsfunktion zwei Werte annehmen, was nicht sein kann. Um trotzdem sinnvolle Lösungen zu erhalten, müssen wir unstetige Lösungen erlauben und den Begriff der schwachen Lösung einführen.

2.8 Bemerkung. Jede stetige schwache Lösung $u \in C^1$ ist automatisch auch eine klassische Lösung.

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < \alpha t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times [0, 1).$$



(a) Charakteristiken für $\alpha = -0.5$; Widerspruch zur Erhaltungseigenschaft

(b) Charakteristiken für $\alpha = 0$; Widerspruch zur Erhaltungseigenschaft

(c) Charakteristiken für $\alpha = 0.5$; Erfüllung der Erhaltungseigenschaft

Abbildung 4: Visualisierung verschiedener Charakteristiken; die rote Linie zeigt die Unstetigkeit an

Welche verschiedenen Unstetigkeiten sind in unserer Lösung zulässig? Wenn wir u_α als Lösung für das Riemannproblem mit $u_l < u_r$ visualisieren gibt es nur eine Stoßgeschwindigkeit, die die Erhaltungbedingung erfüllt, und zwar Abb. 4b.
Wir wollen jetzt ein theoretisches Kriterium dafür entwickeln, welche Unstetigkeiten zulässig sind und die eben getätigte Aussage beweisen.

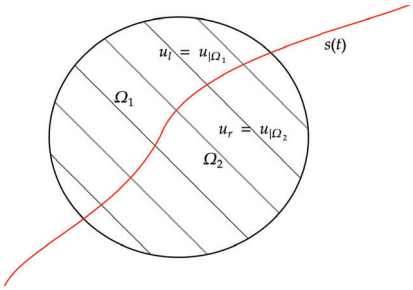


Abbildung 5: Visualisierung der Herleitung der Rankine Hugoniot Bedingung

2.9 Definition (Diskontinuitätskurve)**.** Die Diskontinuitätskurve $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einer Diskontinuität beschreibt den Standort einer Diskontinuität zum Zeitpunkt t.

2.10 Satz. *Sei u eine Lösung des LWR-Modells (2.4). Für alle Diskontinuitätskurven $s(t)$ in einer schwachen Lösung u von 2.4 muss gelten, dass:*

$$s(t) = \frac{f(u_r(t)) - f(u_l(t))}{u_r(t) - u_l(t)}, \tag{2.6}$$

wobei

$$u_l(t) := \lim_{h \downarrow 0} u(t, s(t) - h) \text{ und } u_r(t) := \lim_{h \downarrow 0} u(t, s(t) + h).$$

Beweis: Es gelte $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ wie in Abb. 5. Wir wissen aufgrund der Definition der schwachen Lösung und des Gaußschen Integralsatzes, dass für ein ϕ mit $\operatorname{supp}(\phi) \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\phi_t + f(u)\phi_x d\Omega &= \int_{\Omega_1} u\phi_t + f(u)\phi_x d\Omega + \int_{\Omega_2} u\phi_t + f(u)\phi_x d\Omega \\
&= -\int_{\Omega_1} (u_t + f(u)_x)\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} (u_l(t)\nu_t + f(u_r(t))\nu_x)\phi d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega_2} (u_t + f(u)_x)\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} (u_l(t)\nu_t + f(u_l(t))\nu_x)\phi d\Omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

mit:

$$(\nu_t, \nu_x) = (-s(t), 1).$$

Da u nach Annahme in Ω_1 und Ω_2 stetig ist folgt:

$$\underbrace{\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (u_t + f(u)_x)\phi d\Omega}_{=0} + \int_{\partial\Omega} s(t)(u_r(t) - u_l(t)) - (f(u_r(t) - f(u_l(t))\phi d\Omega.$$

Insgesamt muss also, da ϕ eine beliebige Testfunktion ist, für den Schock gelten:

$$s(t) = \frac{f(u_r(t)) - f(u_l(t))}{u_r(t) - u_l(t)}. \tag{2.7}$$

2.11 Definition (Sprungbedingung Rankine-Hugoniot)**.** Die eben gezeigte Abhängigkeit 2.6 nennen wir Rankine-Hugoniot Bedingung

2.12 Bemerkung. Die Rankine-Hugoniot Bedingung ist also ein einfaches Kriterium zur Überprüfung der Erhaltungseigenschaft einer unstetigen Lösung. Als Beispiel sei auf Abb. 4a, 4b und 4c verwiesen.

2.13 Bemerkung (Äquivalenz der Lösungen)**.** Wenn wir die DGl äquivalent verändern, verändern sich möglicherweise die Lösungen, die die Rankine-Hugoniot Bedingung erfüllen.

2.14 Definition (Riemannproblem)**.** Wir bezeichnen als Riemannproblem für das LWR-Modell das Anfangswertproblem 2.1 mit den Anfangsdaten:

$$u_0 := \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{sonst} \end{cases} \qquad u_l, u_r \in \mathbb{R}.$$

Folgende für ein u_m in Abbildung 6 visualisierte Funktionenschar (es gibt sehr viele Beispiele) ist eine Lösung des Riemannproblems mit Anfangsdaten $u_l < u_r$, die die Rankine-Hugoniot Sprungbedingung 2.11 erfüllt. Wir benötigen also noch ein zusätzliches Kriterium, um die Eindeutigkeit unserer Lösung zu sichern.

$$u_{u_m}(x,t) = \begin{cases} u_l & : x < s_m t \\ u_m & : s_m t \leq x < u_m t \\ x/t & u_m t \leq x < u_r t \\ u_r & u_r t \leq x \end{cases} \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ s_m := \frac{u_l + u_m}{2},\ u_m \in [u_l, u_r] \tag{2.8}$$

2.15 Lemma. *Bei der Funktionenschar 2.8 handelt es sich tatsächlich um schwache Lösungen des Riemannproblems mit $u_l < u_r$.*

Beweis: Siehe 6.1

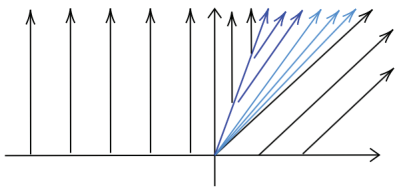


Abbildung 6: Visualisierung von u_{u_m} für ein zulässiges u_m

Physikalisch macht es Sinn, dass die blauen Unstetigkeiten, die aus der Diskontinuität in Abbildung 6 austreten nicht auftreten können, da für deren Existenz eine Information über den Funktionswert derselben benötigt wird. Dieser Wert ist aber nicht in dem System enthalten. Dies korrespondiert mit dem Konzept von Entropie, nach dem keine Informationen einfach erzeugt werden, weshalb die zur Vermeidung dieses Phänomen benötigten Bedingungen auch Entropiebedingungen genannt werden. Diese Eigenschaft wird mathematisch in der Entropiebedingung von Oleinik gefasst:

2.16 Definition (Entropiebedingung von Oleinik)**.** Eine schwache Lösung $u : \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$ erfüllt die Entropiebedingung von Oleinik genau dann, wenn für jede Diskontinuitätskurve $x = \phi(t)$, $\forall t \in (0,T)$ gilt dass $v \in [u_l(t), u_r(t)]$.

$$\frac{f(u_l(t)) - f(v)}{u_l(t) - v} \geq \phi'(t) \geq \frac{f(u_r(t)) - f(v)}{u_r(t) - v}$$

gilt.

2.17 Bemerkung. Die Bedingung 2.16 ist für konvexe f äquivalent dazu, dass

$$f'(u_l) > \phi'(t) > f'(u_r)$$

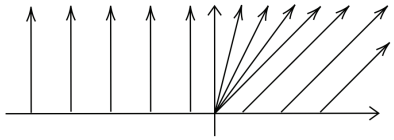


Abbildung 7: Charakteristiken

Die einzige zulässige Lösung aus der Funktionenschar in 2.8 ist also u_{u_l}, d.h $u_m := u_l$, was in Abb. 7 visualisiert wurde.

2.18 Definition (Rarefaktionswellen)**.** Die Lösung eines Riemannproblems mit $u_l < u_r$, die die Entropiebedingung von Oleinik erfüllt, nennen wir Rarefaktionswelle.

In unserer Funktionenschar 2.8 wurde die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Charakteristiken zwischen u_m und u_r einfach auf x/t festgelegt. Warum ergibt das Sinn? Wie sieht diese Ausbreitungsgeschwindigkeit für allgemeine konvexe f aus? Wir betrachten eine allgemeine Rarefaktionswelle für $u_l < u_r$ mit einem $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1$ der Form:

$$u_{u_m}(x,t) = \begin{cases} u_l & : x < u_l t \\ w(\xi) & u_m t \leq x < u_r t \\ u_r & u_r t \leq x \end{cases} \qquad w(u_l) = u_l, \quad .w(u_r) = u_r, \quad \xi := x/t. \tag{2.9}$$

In unserem Fall folgt aus der Differentialgleichung für $u(w(\xi))$:

$$-\frac{x}{t^2} w(\xi) + f'(w(\xi)) \frac{1}{t} w(\xi) \implies \xi = w(\xi)$$

da für unsere spezielle Gleichgewichtsgeschwindigkeitsfunktion $f'(w(\xi)) = w(\xi)$ gilt (der Fall $w' = 0$ kann aufgrund der Anfangswerte nicht auftreten).
Gibt es jetzt für jeden Anfangswert eine auf ganz $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ definierte schwache Lösung, die nur zulässige Stöße, d.h Unstetigkeiten, die die Entropiebedingung und die Lax-Oleinik-Bedingung erfüllen? Um diese Frage zu lösen, führen wir erst eine günstigere, aber äquivalente Definition der Entropie ein.

2.2 Entropielösungen

2.19 Definition (Entropiebedingung von Lax-Oleinik)**.** Wir nennen u eine Entropielösung von Lax des Problems 2.4, falls $f'' > 0$ und

$$\exists E > 0 : \forall a, t > 0, x \in \mathbb{R} : \frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \leq \frac{E}{t}$$

Diese Bedingung bedeutet, dass wir nur Abwärtssprünge erwarten, die mit zunehmender Zeit immer flacher werden.
Wenn wir das Riemannproblem für $u_l > u_r$ betrachten, können wir Verdünnungswellen beobachten. Die eben getätigte Überlegung zeigt, dass in diesem Fall keine Schocks auftreten können, da sonst die Entropie ansteigen würde.

Wir können außerdem zur Festlegung einer eindeutigen Lösung unseres Problems als Grenzwert eines viskosen hyperbolischen Systems betrachten, das eine eindeutige Lösung zulässt. Diese Herangehensweise ergibt aus physikalischer Sicht Sinn, da der Dissipationsteil der Gleichung existiert, nur eben sehr sehr klein ist und vernachlässigt werden kann. Wir definieren zuerst v^ϵ als Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$
\begin{aligned}
v_t^\epsilon + f(v^\epsilon)_x &= \epsilon v_{xx}^\epsilon \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\
v^\epsilon(0,x) &= v_0^\epsilon(x)
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Diese Lösung ist aufgrund des Maximumsprinzips für parabolische Differentialgleichungen eindeutig.

Sei jetzt $\nu \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit ν konvex und so, dass für jede klassische Lösung unseres LWR-Modells 2.4

$$\nu(u)_t + \psi(u)_x = 0$$

gilt. Es folgt daher:

$$\psi(u) = \int_0^u \nu'(\alpha) f'(\alpha) d\alpha + \gamma \quad \gamma, \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Wenn wir 2.10 mit $\nu'(u_\epsilon)$ multiplizieren und $\psi' = f' \cdot \nu'$ setzen, erhalten wir:

$$\nu(u_\epsilon) + \psi(u_\epsilon) = \epsilon \nu_\epsilon u_{\epsilon,xx} = \epsilon(\nu'(u_\epsilon u_{\epsilon,x}))$$

und in der schwachen Formulierung für eine Testfunktion ψ:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\nu(u_\epsilon)\phi_t + \psi(u_\epsilon)\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \nu(u_0(x))\phi(x,0) \geq 0. \tag{2.11}$$

Es würde deshalb Sinn ergeben, diese Eigenschaft auch für den Grenzwert $\epsilon \to 0$ unserer Lösung zu beachten. Dies führt uns zu einer zweiten Definition von Entropielösungen:

2.20 Definition (Entropielösung)**.** Sei $u : \mathbb{R} \times (0,T)$ eine schwache Lösung von 2.4. Dann nennen wir u Entropielösung genau dann, wenn für alle konvexen Entropien ν, alle dazugehörige Entropiefluxe ψ und alle Testfunktionen ϕ die Gleichung 2.11 gilt.

Nachdem wir jetzt drei verschiedene Entropielösungen vorgestellt haben, stellt sich die natürliche Frage, in welcher Weise diese zusammenhängen.

2.21 Satz (Zusammenhänge der verschiedenen Entropiebedingungen)**.** *Die Entropiebedingungen 2.16 (Oleinik), 2.19(Lax-Oleinik) und 2.20(Viskosität) sind äquivalent, falls $f'' > 0$.*

Beweis:

1. 2.20 $\implies$ 2.16

   Sei $\sigma(t)$ die Position der Diskontinuität und $\Lambda := \{(\sigma(t), t | t > 0)\}$ eine glatte Kurve mit $s(t) := \sigma'(t)$. Sei $(x_0, t_0) \in \Lambda$ und V eine Umgebung von (x_0, t_0), auf der die Lösung keine Diskontinuität außer Λ besitzt, sowie:

   $$V_l := V \cap \{(x,t) | x < \sigma(t)\} \quad \text{und} \quad V_r := V \cap \{(x,t) | x > q\sigma(t)\}$$

   Es folgt aus 2.20, dass für alle Testfunktionen ϕ mit $supp(\phi) \subset V$ und $\phi \geq 0$ gilt:

   $$
   \begin{aligned}
   0 &\geq -\int_V (\nu(u)\phi_t + \psi(u)\phi_x)\, dx dt \\
   &= \int_{\partial V} (v(u) + \psi(u))\phi \vec{n}\, dS(x,y)
   \end{aligned}
   $$

$$= \int_\Lambda ((\nu(u_l) - \nu(u_r))\underbrace{s}_{=E(u_l)} - (\psi(u_l) - \psi(u_r)))\phi \, dxdt \tag{2.12}$$

Definiere

$$s(u) := \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r}, \quad E(u) := s(u)(\nu(u) - \nu(u_r))s - (\psi(u) - \psi(u_r)).$$

Wir möchten zeigen, dass $u_l > u_r$, da hieraus durch die Konvexität die Behauptung folgt.

Wir wissen aus 2.12, dass $E(u_l) \leq 0$ und $E(u_r) = 0$, und es folgt sofort, dass $E'(u_r) = 0$, sowie:

$$s'(t) = \frac{f'(u)(u - u_r) - (f(u) - f(u_r))}{(u - u_r)^2} = cf''(\xi), \quad c > 0,$$

also $s'(t) > 0$ aufgrund der Konvexität. Außerdem:

$$\begin{aligned} E'(u) &= s'(u)(\nu(u) - \nu(u_r)) + s(u)\nu'(u) - \nu'(u)f'(u) \\ &= s'(u)(\nu(u) - \nu(u_r)) + s(u)\nu'(u) - \nu'(u)s'(u)(u - u_r) \\ &= s'\nu'(\xi_2)(u - u_r) - s'\nu'(u - u_r) \\ &= s'(u - u_r)\nu''(\xi_3)(\xi_2 - u) < 0 \end{aligned}$$

mit ξ_2 zwischen u und u_r, sowie ξ_3 zwischen u und ξ_2.

2. 2.16 $\implies$ 2.19. Da der Beweis etwas komplizierter ist und über die Hopf-Lax-Transformation funktioniert, möchten wir hier darauf verzichten und verweisen auf die Arbeiten von Oleinik.

3. 2.19 $\implies$ 2.20: Diese Implikation folgt aus den beiden anderen Implikationen und aus der Eindeutigkeit der jeweiligen Lösungen von 2.19 und 2.20. Für nähere Informationen verweisen wir hierfür auf [19].

2.3 Existenz von Lösungen

Gibt es für unser Modell Lösungen? Tatsächlich gibt es eine Existenzaussage für generelle Lösungen des LWR-Modells für alle beschränkten Anfangswerte und konvexe f.
Prinzipiell gibt es zwei mögliche Lösungsansätze, die sich in der Formulierung der Entropiebedingung unterscheiden. Wie bei die Entropiebedingung 2.20 bemerkt, können wir eine Lösung unseres Modells, das die Entropiebedingung erfüllt, als Grenzwert eines viskosen Modells auffassen, und damit die Existenz von Lösungen beweisen.
Wenn wir aber die Entropiebedingung 2.19 als Grundlage nehmen, kann man die Existenz einer Entropielösung gut als Grenzwert eines Differenzschemas betrachten. Diese Methode ist vorteilhaft, weil sie uns gleich noch ein finites Differenzschema gibt.

Wir wählen also die zweite Herangehensweise und definieren ein Differenzschema (aus der Taylorentwicklung abgeleitet), dessen Konvergenz wir zeigen.
Seien $h, l > 0$. Wir diskretisieren den Raum $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ durch:

$$x_n = nl, \; k \in \mathbb{Z} \quad \text{sowie} \quad t_k = kh, \; n \in \mathbb{N}$$

und setzen

$$u_n^k := u(x_k, t_n)$$

für ein $u \in C^1(R)$.

2.22 Definition (Differenzschema Lax-Friedrich)**.** Wir definieren

$$\frac{u_n^{k+1} - (u_{n+1}^k + u_{n-1}^k)/2}{h} + \frac{f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)}{2l} = 0 \tag{2.13}$$

mit

$$\frac{Ah}{l} \leq 1 \quad A := \max_{u \leq |M|} |f'(u)| \quad M := \|u_0\|_{L^\infty} \tag{2.14}$$

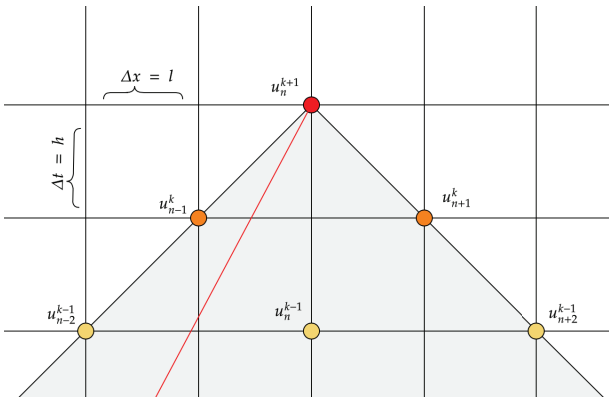


Abbildung 8: Erklärung der CFL Bedingung

Die Bedingung 2.14 ist eine Courant-Friedrichs-Lewy (CFL-)Bedingung und kann so interpretiert werden, dass sichergestellt werden muss, dass in einem Differenzschema für einen Zeitschritt genügend Ortsinformationen zur Verfügung stehen.
Nur wenn die rote Halbgerade in Abb. 8, die die Charakteristik, auf welcher der Punkt u_n^{k+1} liegt darstellt, vom numerischem Schema erfasst wird, können wir überhaupt ein sinnvolles Ergebnis erwarten.

2.23 Satz. *Sei $u_0 \in L_\infty$, $f \in C^2$ mit $f'' > 0$ auf $\{u : |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$ und u_{h_i,l_i} die Lösung des Differenzschemas mit den Schrittweiten h_i bzw. l_i die alle die Bedingung 2.14 erfüllen. Dann konvergiert eine Teilfolge von u_{h_i,l_i} gegen eine eindeutige Lösung u mit den Eigenschaften:*

1. *$|u(x,t)| \leq \|u_0\|_\infty =: M$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.*
2. *Es existiert eine Konstante $E > 0$, die nur von $M, \mu := \inf\{f''(u) : |u| \leq \|u_0\|_\infty\}$ und $A := \max\{|f'(u)||u| \leq \|u_0\|_\infty\}$ abhängt so, dass die Entropiebedingung 2.19 erfüllt ist.*
3. *Wenn $u_0, v_0 \in L_\infty \cap L_1$ mit $\|v_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ und v die Lösung für die Anfangsdaten v_0 ist, gilt $\forall x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ und $t > 0$*

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x,t) - v(x,t)| dx \leq \int_{x_1+At}^{x_2-At} |u(x,t) - v(x,t)| dx$$

.

Hierbei ist die Konvergenz so zu verstehen, dass für alle $X, t, T > 0$:

$$\int_{|x|} |u_{h_i,l_i} - u(x,t)| dx \to 0$$

und

$$\int_{0 \leq t \leq T} \int_{|x|} |u_{h_i,l_i} - u(x,t)| dx dt \to 0$$

Beweis: Der sehr technische Beweis ist in [3] unter Theorem 16.1 und Lemma 16.7 zu finden und aus Platzgründen nicht aufgeführt. Der Aufbau des Beweises sei dennoch kurz erwähnt. Um die Konvergenz des Differenzschemas zu zeigen, können wir zuerst die Beschränktheit des Konvergenzschemas prüfen, dann dass es ebenfalls eine diskrete Entropiebedingung erfüllt, ein Maximumsprinzip erfüllt, eine beschränkte Variation hat, sowie lipschitzstetig und stabil ist. Die beschränkte Variation und Beschränktheit brauchen wir dann im nächsten Schritt, um eine konvergierende Teilfolge finden zu können. Für den Grenzwert dieser Teilfolge zeigen wir dann, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt und diese ebenfalls die Entropiebedingung erfüllt.

Insbesondere gibt uns dieser Satz eine Stetigkeitsaussage und die Beschränktheit der Lösung des LWR-Modells. Das ist in sofern wichtig, als dass der Sachverhalt dass Autos nicht unendlich schnell werden können von unserem Modell ebenfalls dargestellt wird.

2.24 Bemerkung. Wie in Abb. 9 zu sehen besitzt das eben eingeführte Differenzschema vor allem für große Schrittweiten eine hohe Diffusion. Das legt die Interpretation nahe, dass das Schema eigentlich den Grenzwert der viskosen Lösung approximiert.

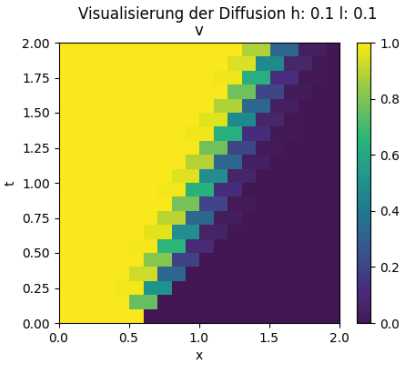


Abbildung 9: Visualisierung der Diffusion in der Geschwindigkeit der numerischen Approximation des LWR-Modells mit dem Lax-Friedrich Schema 2.13 für das Riemannproblem mit $u_l = 1$, $u_r = 0$ und einem groben Gitter.

Wir können jetzt zu unserem anfänglichem Problem zurückkehren und eine Vorhersage darüber treffen, unter welchen Bedingungen sich ein Rückstau auflöst.

2.4 Ampelproblem

Der folgende Abschnitt basiert auf [12]. Wie in der Einleitung beschrieben, ist es sinnvoll den Fluss und Aufstau vor Ampeln quantitativ zu beschreiben. Wie können wir also jetzt mit unserem einfachem Staumodell Aussagen über die Beschaffenheit von Aufstauungen vor Ampeln treffen? Wir benutzen im folgenden wieder das LWR Modell mit $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Des Weiteren gehen wir davon aus, dass auf unserer Strecke ohne Ein- oder Ausfahrten bei $x = 0$ eine Ampel steht, die nur die üblichen Ampelphasen "Rot" und "Grün" zulässt.
Zur Betrachtung der Charakteristiken bei unseren Ampelphasen betrachten wir das Problem in drei Schritten:

1. Zuerst betrachten wir die Charakteristiken der ersten Rotphase, die mit dem LWR Modell und den Anfangsdaten $(x_0)_{|x\leq 0} = 1$ und $(x_0)_{|x>0} = -1$ entstehen.

2. Nach der Umschaltzeit $\omega_1 \in (0, \infty)$ betrachten wir wieder die Charakteristiken des LWR Modells, diesmal nehmen wir als Anfangswerte das Ergebnis aus dem ersten Teil und betrachten die Charakteristiken, bis sich der Stau vor der Ampel aufgelöst hat.

3. Wir betrachten die Charakteristiken nachdem Zeitpunkt, ab dem es keine stehenden Fahrzeuge mehr gibt.

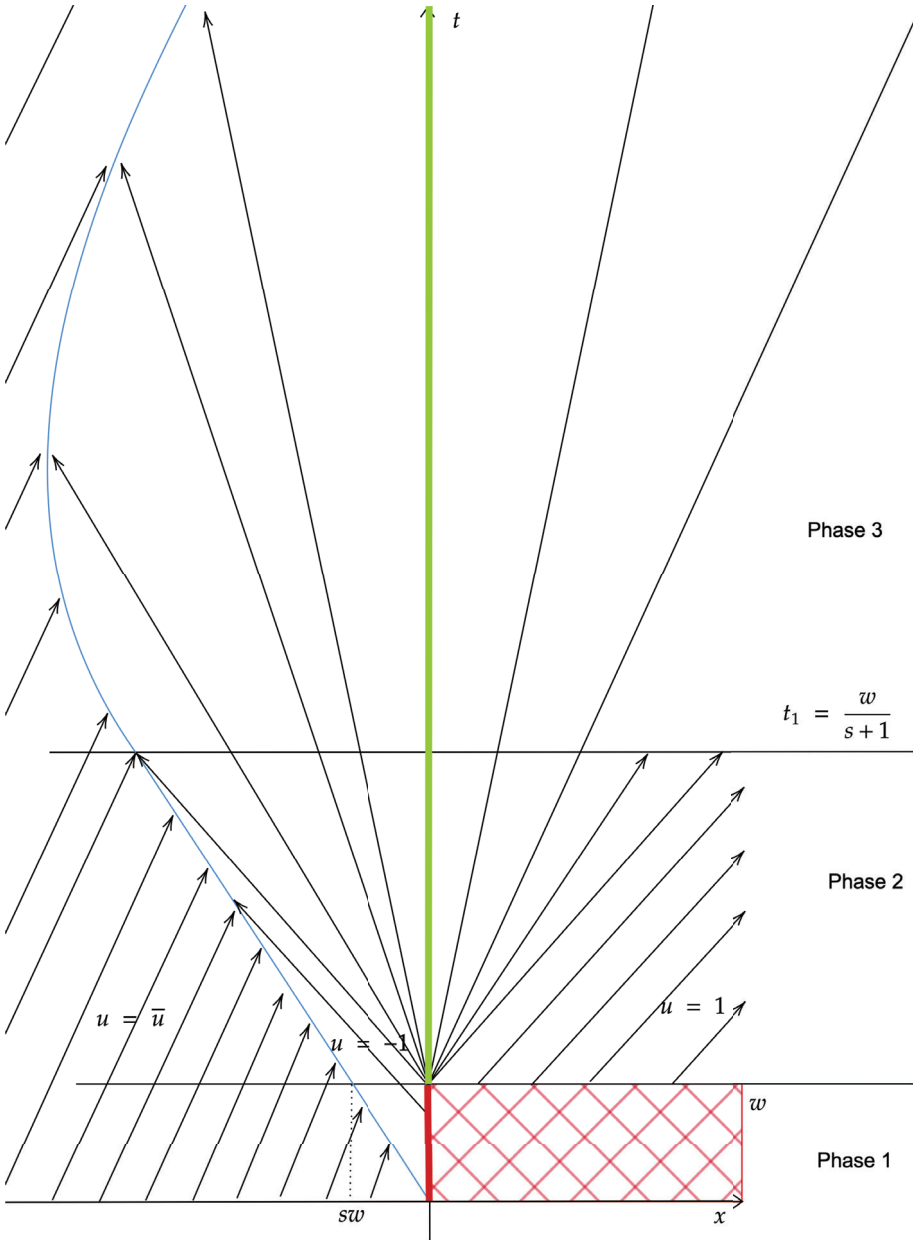


Abbildung 10: Charakteristiken beim Ampelproblem

Die Zusammenhänge der verschiedenen Phasen und deren Charakteristiken sind in Abb. 10 visualisiert und wie gehen jetzt zur genauen Analyse der drei Punkte über:

1. Phase 1: Rotphase, also $0 \leq t < \omega$.

   Wir lösen also die Burgersungleichung mit den Anfangswerten:

$$u_0 = \begin{cases} \bar{u} & x \leq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

   und der Randbedingung $u(0,t) = -1$. Wir erhalten die Lösung:

$$u_1(x,t) = \begin{cases} \bar{u} & x < st \\ -1 & x > st. \end{cases}$$

   Mit der Schockgeschwindigkeit (Rankine-Hugoniot Bedingungen):

$$s = \frac{u_l - u_r}{2} = \frac{\bar{u} - 1}{2}$$

2. Phase 2: Grünphase, also $t \geq \omega$. Wir lösen jetzt also die Burgersungleichung mit den Anfangsdaten:
$$u_0(x) = u_1(x, \omega).$$
Da $u_l = \bar{u} > -1 = u_r$ entwickelt sich eine Schockwelle mit Geschwindigkeit $s = (\bar{u} - 1)/2 < 0$ und eine Verdünnungswelle bei $x = 0$, da $u_l = -1 < 1 = u_r$.

   Die Lösung hierfür ist:
$$u_2(x,t) = \begin{cases} \bar{u} & x < st \\ -1 & st \leq x < \omega - t \\ \frac{x}{t-\omega} & \omega - t \leq x \leq t - \omega \\ 1 & x > t - \omega \end{cases}.$$
Diese Lösung ergibt nur Sinn, falls $st < \omega - t$, oder $t < t_1 := \frac{\omega}{s+1} = \frac{2\omega}{\bar{u}+1}$

3. Phase 3: Grünphase mit Stoß, also $t \geq t_1$. Die stehende Schlange an Autos hat sich aufgelöst und es gibt erneut einen Stoß mit Geschwindigkeit:
$$\begin{aligned} s(t) = \phi'(t) &= \frac{1}{2}(u(\phi(t) + 0, t) + u(\phi(t) - 0, t)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\phi(t)}{t - \omega} + \bar{u}\right). \end{aligned}$$
Dies ist eine ordinäre Differentialgleichung, die wir mit den Anfangsdaten:
$$\phi(t_1) = st_1 = \omega \frac{\bar{u} - 1}{\bar{u} + 1}$$
lösen können. Wir erhalten für $t \geq t_1$:
$$\phi(t) = \bar{u}(t - \omega) - \sqrt{t - \omega}\sqrt{\omega(1 - \bar{u}^2)}.$$
Falls $\bar{u} \leq 0$ gilt $\phi(t) \underset{t\to\infty}{\to} -\infty$, also verschwindet der Schock niemals und die Schockgeschwindigkeit geht gegen $\bar{u}$.

   Falls $\bar{u} < 0$ gilt $\phi(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty$, und der Schock wandert in die positive $x-$Richtung.

Wir können dieses Modell jetzt benutzen, um folgende Fragen genauer zu untersuchen:

1. Wie lange muss die Rot-/Grünphase sein, damit es keinen dauerhaften Stau vor der Ampel gibt?

2. Wie sieht die Entwicklung der Größe des Staus aus? Also wie schnell verschwindet ein Stau z.B. nach dem Aufräumen einer Unfallstelle?

Angenommen, nach der Zeit $t = 2\omega$ schaltet die Ampel von grün zurück nach rot. Wie lang soll die Grünphase sein, damit keine Autos immer stehen bleiben, es also keinen Dauerstau gibt?

2.25 Definition (Verschwinden eines Rückstaus)**.** Wir sprechen davon, dass es keinen Rückstau zum Zeitpunkt $t > \omega$ mit der Rotphasenlänge ω für eine Menge an Anfangswerten $\Lambda := \{u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (u_0)_{|<1} > -1\}$ gibt, falls für jedes $u_0 \in \Lambda$ für die Lösung u des LWR-Modells mit den Anfangswerten u_1 gilt, dass:
$$u(t - \omega, \cdot)_{|<0} > -1$$
wobei u_1 den Zustand des LWR-Modells mit den Anfangsdaten
$$u_0'(x) = \begin{cases} u_0(x) & x < 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$
nach der Zeit ω darstellt.

2.26 Satz (Aufstauen). *Sei $\omega > 0$ die Länge der Rotphase. Es gibt nur keinen Rückstau vor einer Ampel zum Zeitpunkt 2ω für den Anfangswert u_0, falls*

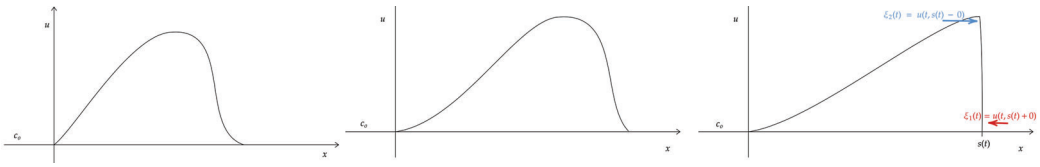
$$u_0 \leq p_0 := \frac{\rho_{max}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sim 0.146\rho_{max}.$$

Beweis:
Sei t_2 der Zeitpunkt, in dem der Tailback gerade aufgehört hat zu existieren. In unserer vorherigen Betrachtung der Ampelphasen würde das $t_2 \leq 2\omega$ mit $\phi(t_2) = 0$ entsprechen.
Da $\phi(t_2) = 0$ die eindeutige Lösung $t_2 = \frac{\omega}{\bar{u}^2}$ besitzt führt dies zu:

$$t_2 \leq 2\omega \iff \bar{u} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In der ursprünglichen Dichte verschwindet der Tailback also nur, falls

$$\rho \leq \rho_0 = \frac{\rho_{max}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.146\rho_{max}.$$



(a) Zeitpunkt t_1 (b) Zeitpunkt $t_2 > t_1$ (c) Zeitpunkt $t_3 > t_2$

Abbildung 11: Zeitlicher Verlauf einer Welle in der Lösung des LWR-Modells

Eng mit der Frage, wie lang eine Ampelphase sein muss damit es keine immer stehenden Autos gibt, ist die Frage verbunden wie schnell ein bestimmter Stoß abflacht. Zur Vereinfachung des Sachverhaltes gehen wir davon aus, dass wir eine Funktion betrachten, die eine Aufstauung nahe des Ursprungs hat, also ein u_b für das für ein $L > 0$ gilt

$$\begin{cases} u_b(x) > c_0 & \text{falls } x \in [0, L] \\ u_b(x) = c_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $s(t)$ die vorderste Welle der Lösung (es muss mindestens eine geben und es ist klar, dass es eine vorderste gibt). Wir definieren den Startwert $\xi_1(t)$, durch den die Charakteristik in $\lim_{x \uparrow s(t)} u(t, x) =: u(t, s(t) - 0)$ geht sowie $\xi_2(t)$ als den Wert, durch den die Charakteristik von $\lim_{x \downarrow s(t)} u(t, x)$ geht sowie die Höhe der Welle als $c := u(t, \xi_1(t)) - u(t, \xi_2(t)) > 0$. Die Definitionen sind noch einmal in Abb. 11c verdeutlicht, in der außerdem das Aufbauen einer Welle visualisiert wurde.

2.27 Satz (Ausbreiten der Welle). *Sei $t \in \mathbb{R}_{>0}$, u eine Lösung des LWR-Modells zu den eben definierten Anfangsdaten u_b, sowie c, s, ξ_1, ξ_2 wie eben definiert. Dann flacht die Höhe c einer Wellenfront flacht wie $1/\sqrt{t}$ ab.*

Beweis: Aus der Erhaltung der Fahrzeuge folgt, da sich bei $s(t)$ die Charakteristiken durch $\xi_1(t)$ und $\xi_2(t)$ treffen und sich Charakteristiken nicht überschneiden:

$$\frac{1}{2}(u_b(\xi_1) + u_b(\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} u_b(s)ds$$
$$\implies \frac{1}{2}(u_b(x_1) + u_b(x_2) - 2c_0)(x_1 - x_2) = \int_{x_2}^{x_1} (u_b(s) - c_0)\, ds.$$

Nach einiger Zeit gilt aufgrund der strikt positiven Geschwindigkeit der Welle $\xi_1 > L$, und damit:

$$\frac{1}{2}(x_b(x_2) - c_0)(x_1 - x_2) = \int_{x_2}^{L} (f(s) - c_0)\, ds$$

Da aber die Startwerte, deren Charakteristiken zum Zeitpunkt t zusammen treffen, durch

$$r(t) = \xi_1 + u_b(\xi_1)t \quad r(t) = \xi_2 + u_b(\xi_2)t$$

und damit $t = \frac{x_1 - x_2}{x_0(x_2) - c_0}$ bestimmt sind, folgt:

$$\frac{1}{2}(u_b(\xi_2) - c_0)^2 t = \int_{x_2}^{L} (u_b(s) - c_0))\, ds$$

Definiere das gesamte Volumen des Buckels als:

$$A := \int_0^L (u_b(s) - c_0)\, ds$$

Dies führt uns für $t \to \infty$, also $x_2 \to 0$:

$$c \sim \sqrt{\frac{2A}{t}}$$

Es ist zu bemerken, dass die exakte Anfangsverteilung verloren geht, diese Art an Problem also nicht umkehrbar ist. Dies ist direkt mit dem physikalischem Verständnis von Entropie verbunden.

2.5 Fehler des Modells

Das LWR-Modell kann einige Sachverhalte nicht richtig darstellen:

1. Das Modell beachtet nicht das natürliche Verhalten von Fahrern, die erst nach einer kurzen Verzögerung auf veränderte Verkehrssituationen reagieren und postuliert, das Fahrer immer mit der der aktuellen Dichte angemessen Geschwindigkeit fahren.

2. Wenn wir das Problem mit den Anfangsdaten $u_0 = \frac{\rho_{max}}{100}$ betrachten, gibt es als eindeutige Entropielösung u_0. Dies widerspricht aber der Realität von beobachtbaren Staus, bei der sich bei niedrigen Verkehrsdichten aufgrund kleiner Verzögerungen der Fahrer Wellen herausbilden.

3. Bei einem Schock wird eine unendliche Beschleunigung vorausgesagt.

Um den ersten Fehler abzumildern erweitern wir unser Modell zum AWR-Modell.

2.28 Bemerkung. Reale Staus treten häufig auf, wenn die Straße plötzlich schmaler wird, oder eine Spur gesperrt wird, d.h. sich das fundamentale Diagramm verändert. Diese Einflüsse können wir am besten in unser Modell integrieren, indem wir das fundamentale Diagramm ortsabhängig machen, d.h. für die Simulation eines "engeren" Straßenabschnittes ordnen wir der gleichen Dichte eine niedrigere Gleichgewichtsgeschwindigkeit zu. Für weitere Überlegungen hierzu sei auf [10] (z.B. Seite 100) verwiesen.

3 Intermezzo zu linearen hyperbolischen Systemen

Bevor wir im nächstem Schritt ein kompliziertes nichtlineares hyperbolisches Modell betrachten, bietet es sich an zuerst einfache hyperbolische Systeme zu untersuchen. Das hat außerdem den Vorteil, dass die Interpretation der später eingeführten Diagramme klar wird.
Wir bezeichnen als ein hyperbolisches System ein System der Form

$$u_t + A(u)u_x = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3.1}$$

bzw.

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $\nabla F(u) = A(u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit reelen Eigenwerten diagonalisierbar ist, d.h. es gibt R, Λ:

$$A(u) = R(u)\Lambda(u)R^{-1}(u)$$

wobei $R = \{r_1|r_2|.....|r_n\}$ die Matrix aus rechten Eigenvektoren ist und $\Lambda(u) = \text{diag}(\lambda_1, ..., .\lambda_n)(u)$ die Diagonalmatrix aus den Eigenwerten. Insbesondere gilt:

$$A(u)r_p(u) = \lambda_p(u)r_p(u) \text{ für } p = 1, 2, ..., n \quad .$$

3.1 Bemerkung (strikt hyperbolisch)**.** Dieses System wird strikt hyperbolisch genannt, wenn alle Eigenwerte unterschiedlich sind.

Wir erwarten in unserem Fall eines hyperbolischen Systems wie im linearen Fall, dass unstetige Lösungen auftreten können. Ebenfalls wie im linearen Fall wollen wir daher eine Bedingung an Unstetigkeiten stellen, damit die Größen $u_1, ..., u_n$ erhalten bleiben. Wir fordern also zuerst n Rankine-Hugoniot Bedingungen mit Geschwindigkeiten $s_1, ..., s_n$ für jede Größe im Vektor u. Es ist klar, dass $s_1 = ... = s_n$ gelten muss. Insgesamt erhalten wir also die für Systeme erweiterten Rankine-Hugoniot Bedingungnen:

3.2 Definition (Erweiterte Rankine-Hugoniot Bedingung)**.** Eine Unstetigkeit eines hyperbolischen Systems erfüllt die erweiterten Rankine-Hugoniot Bedingungen, falls die Geschwindigkeit der Unstetigkeit s mit den Werten rechts(links) davon für $u_r(u_l)$ folgenden Zusammenhang erfüllt.

$$\exists s \in \mathbb{R} : F(u_r) - F(u_l) = s(u_r - u_l) \iff det|F(u_r) - F(u_l), u_r - u_l| = 0$$

Wenn wir 3.1 lösen möchten, können wir uns die charakteristischen Variablen betrachten:

$$v := Ru.$$

Für diese gilt:

$$Ru_t + \Lambda R u_x = 0 \implies v_t + \Lambda v_x = 0.$$

Da Λ eine Diagonalmatrix ist, haben wir unser lineares System in m unabhängige skalare Gleichungen umgewandelt:

$$(v_p)_t + \lambda_p (v_p)_x = 0$$

Wenn wir uns zuerst dem einfachsten Fall, dass A konstant ist, zuwenden, sehen wir, dass die Lösung aus einer Überlagerung von verschiedenen Wellen besteht. Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen möchte ich kurz ein Beispiel konkretes vorstellen. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 und die zugehörigen Eigenvektoren r_1, r_2 sind:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1 \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten mit

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die unabhängigen Systeme:

$$(x-y)_t + 3(x-y)_x = 0, \quad (x+y)_t - (x+y)_x = 0,$$

beziehungsweise analog zur linearen Advektionsgleichung:

$$z_1(s,t) = u_1(s-3t), \qquad z_2(r,t) = u_2(r+t) \text{ wobei } s = x-y,\ r = x+y.$$

Mit beliebigen (ebenfalls unstetigen) Anfangsdaten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ erhalten wir für u_1, u_2:

$$2u_1 = f_1 - f_2 \quad 2u_2 = f_1 + f_2$$

Die Lösung unseres linearen Problems besteht also aus einer Überlagerung der zeitlich verschobenen Wellen:

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} z_1(x-y,t) + z_2(x+y,t) \\ z_2(x+y,t) - z_1(x-y,t) \end{pmatrix}.$$

Um die Struktur der Lösung zu verdeutlichen wird die Lösung des allgemeinen Riemannproblems vorgestellt.

3.3 Definition. Als Riemannproblem für 3.1 bezeichnen wir die Differentialgleichung mit den Anfangswerten:

$$u_0(x,0) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x \geq 0 \end{cases} \quad u_l, u_r \in \mathbb{R}^n.$$

Zur Vereinfachung spalten wir u_l und u_r mit den (orthonormalen) Eigenvektoren auf:

$$u_l = \sum_{p=1}^{n} \alpha_r r_p \quad u_r = \sum_{p=1}^{n} \beta_r r_p.$$

also

$$v_p(x,0) = \begin{cases} \alpha_p & x < 0 \\ \beta_p & x \geq 0 \end{cases}.$$

Wir wissen, da es sich um eine Erhaltungsgleichung handelt, aufgrund der Rankine-Hugoniot Bedingung 2.11, dass also

$$v_p(x,t) = \begin{cases} \alpha_p & x < \lambda_p t \\ \beta_p & x \geq \lambda_p t \end{cases}$$

Um das ursprüngliche Problem zu lösen, können wir also unsere Lösung wieder zusammensetzen:

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\min_p\{x-\lambda_p t>0\}} \alpha_r r_p \ + \sum_{p=\min_p\{x-\lambda_p t>0\}+1}^{m} \beta_r r_p$$

oder äquivalent dazu

$$u(x,t) = u_l + \sum_{\lambda_p < x/t} (\beta_p - \alpha_p) r_p$$

In Abb. 12 ist zu sehen, welche Werte die Lösung in welchem Bereich bei zwei unterschiedlichen Eigenwerten annimmt. Es ist zu bemerken, dass es nicht vorkommen kann, dass ein Eigenwert $\lambda_l > \lambda_n$ vor λ_n "umspringt".

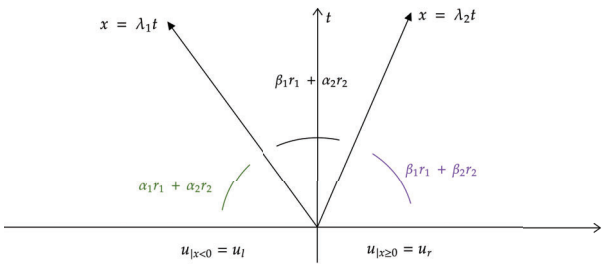


Abbildung 12: Visualisierung der verschiedenen Bereiche der Lösung des Riemannproblems

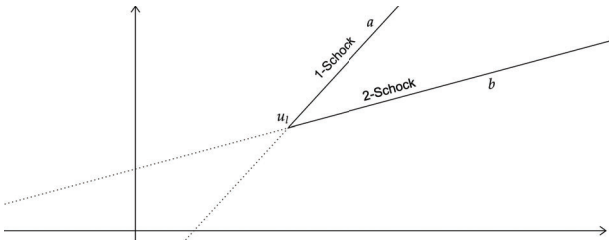


Abbildung 13: Visualisierung der Zustände u_r des Riemannproblems in der Phasenebene, die mit einer einzelnen Unstetigkeit verbunden werden können

Eine andere Möglichkeit, diesen Zusammenhang für $n = 2$ zu visualisieren, besteht darin die Phasenebene[3] zu betrachten. Für jede Funktionsauswertung $u(x,t) = (u_x, u_y)$ tragen wir im Diagramm den u_x-Wert auf die x-Achse und den u_y-Wert auf die y-Achse. Dies erlaubt uns später vor allem, zu untersuchen welche Anfangszustände mit welchen Schocks/Unstetigkeiten verbunden werden können, d.h. welche Arten an Wellen/Stößen/Unstetigkeiten beim Riemannproblem auftreten.
Wir sehen in Abbildung 13, dass alle Werte u_r, die mit u_l mit einer einzelnen Unstetigkeit verbunden werden können auf der Geraden a (für einen 1-Unstetigkeit) oder auf der Geraden b liegen müssen. Diese werden genau von den Eigenvektoren erzeugt. Insbesondere ist zu beachten, dass keine Rarefaktionswellen oder Stöße auftreten. Die hier entstehenden Unstetigkeiten werden wir später Kontaktunstetigkeiten nennen.

4 Aw-Rascle-Zhang(ARZ) Model

Um eines der Hauptfehlverhalten des LWR-Modells auszugleichen, wurde es zum ARZ-Modell weiterentwickelt.
Im folgenden wird erst das Modell hergeleitet, dann über verschiedene mathematische Eigenschaften gesprochen, das Modell dann numerisch untersucht und schließlich etwas über Jamitons bzw. Phantomstaus gesagt.

Generell wurden in der Geschichte der Verkehrsmodelle nach dem LWR-Modell verschiedene Modelle zweiter Ordnung vorgestellt, die aber alle an dem Problem litten, dass das Modell eine vorwärtsgerichtete Informationsübertragung vorhersagte, d.h. die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges wurde von der des nachfolgenden Verkehrsteilnehmers beeinflusst. Das ergibt natürlich wenig Sinn, da die wenigsten Fahrer ihr Fahrverhalten an das Fahrzeug hinter ihnen anpassen. Nach einem dramatischen wortwörtlichen Nachruf auf diese Modelle gab es dann im Form des Aufsatzes von A. Aw und M. Rascle eine ebenso dramatische "Wiederauferstehung" der Theorie [4].

[3] Englisch: phase plane

4.1 Herleitung des ARZ Modells

Wir möchten das genauere Modell intuitiv aus einem mikroskopischen Modell motivieren. Da wir uns hauptsächlich mit den Eigenschaften des Modells beschäftigen wollen, verweisen wir für eine mathematisch lückenlose Herleitung auf die Arbeiten [15] und [16] von H. M. Zhang. Auf diesen beiden Arbeiten basiert auch der nachfolgende Abschnitt.

Die Hauptidee dieses neuen Modells besteht daran, kleine Verzögerungen im Fahrverhalten zu berücksichtigen, also davon auszugehen, dass nicht sofort die angestrebte Geschwindigkeit angenommen wird. Wie im ersten Modell fangen wir mit einigen Grundannahmen an:

1. Wie beim LWR Modell werden Fahrzeuge weder erzeugt, noch verschwinden sie. Wir betrachten außerdem eine unendlich lange homogene Straße ohne Ein-Oder Ausfahrten oder sonstigen Unregelmäßigkeiten, die das Fahrverhalten beeinflussen.

2. Es gibt einen eindeutige Zuordnung $v_e(\rho) \in C_2$ zwischen der angestrebten Geschwindigkeit und der Dichte mit$v_e'(\rho) \leq 0$, insbesondere $\rho v_e(\rho)'' < 0, v_e(0) = v_0$ und $v_e(\rho_j) = 0$, wobei v_0 die maximale Geschwindigkeit bei einer freien Bahn und ρ_{max} die Dichte bei einem stehendem Stau beschreibt. Wir nennen diese Zuordnung Gleichgewichtsgeschwindigkeitsfunktion, und nennen ein Modell im Gleichgewichtszustand falls $\rho = v_e(\rho)$ gilt.

3. Fahrer reagieren abhängig vom Abstand zum nächsten Fahrzeug auf Veränderungen der Verkehrssituation.

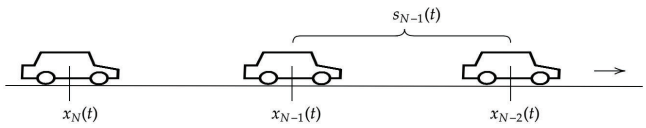


Abbildung 14: Visualisierung des mikroskopischen Modells zur Herleitung des ARZ-Modells

Sei wieder $\rho(x,t)$ die Verkehrsdichte, $v(x,t)$ die Geschwindigkeit, $q(x,t)$ der Verkehrsfluss jeweils zur Zeit $t \in [0,\infty)$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ und $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \to r(s)$ eine der Skalierung unseres Modell angepasste vom Abstand zum nächstem Fahrer abhängige Funktion, die angibt nach welcher Zeit s die Informationen vom Fahrer verarbeitet werden.

Wir beginnen mit einem einfachem mikroskopischem Modell, indem auf dem wie oben beschrieben beschaffenen Streckenabschnitt die Autos vor einer gewissen Stelle wie in Abbildung 14 nummeriert sind. Die Notation $x_n(t)$ bezeichne hierbei die absolute Position des n-ten Autos zur Zeit t.
Wir gehen davon aus, dass ein Fahrer beschleunigt, falls sich der Abstand zum nächsten Fahrzeug vergrößert und bremst, falls sich dieser verkleinert. Außerdem wird diese Beschleunigung an den Abstand angepasst, d.h. falls der Abstand zum nächstem Auto kleiner ist, wir die Geschwindigkeit schneller angepasst. Mit der Funktion τ, die diesen Zusammenhang beschreibt, erhalten wir also:

$$\tau(s_n(t))x_n''(t) = x_{n-1}'(t) - x_n'(t), \qquad s_n(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t). \tag{4.1}$$

Dies können wir jetzt als Kraftfeld an einzelnen Punkten auffassen und im folgenden gedanklich unser Modell immer feiner werden lassen. Dies ist der mathematisch nicht

ausgeführte Punkt (auf den hier leider verzichtet werden muss), da die Konvergenz der Lösungen gezeigt werden muss, und um welche Konvergenz es sich genau handelt. Aus **??** erhalten wir:

$$\tau(s(x,t),t)\frac{dv(x(t),t)}{dt} = \frac{ds(x(t),t)}{dt}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit der Taylorentwicklung erweitern erhalten wir:

$$\tau(s)(v_t + vv_x) = s_t + vs_x. \tag{4.2}$$

Außerdem gilt ja immer noch unsere Erhaltungsgleichung 2.4. Da für fein auflösende Modelle bei einer gleichmäßigen Verteilung der Fahrzeuge $\rho = 1/s$ gilt, folgt hieraus:

$$s_t + vs_x = sv_x\ . \tag{4.3}$$

Mit 4.2 und 4.3 erhalten wir dann (Beachte $s > 0$):

$$\tau(s)(v_t + vv_x) = sv_x. \tag{4.4}$$

Wir betrachten jetzt

$$\frac{s}{\tau(s)},$$

also die Geschwindigkeit, mit der Informationen im Modell propagiert werden. Können wir diese Größe anders ausdrücken? Wenn die Verkehrsteilnehmer im Modell mit der Verkehrsequilibriumsgeschwindigkeit fahren, muss die einzige Veränderung des Verkehrsflusses dadurch verursacht werden, dass sie zusätzliche Informationen wahrnehmen und verarbeiten. Wir können also in diesem Fall davon ausgehen, dass die zeitliche Veränderung des Verkehrsflusses der Propagationsgeschwindigkeit entspricht, da dies die einzige direkt den Verkehrsfluss beeinflussende Variable ist. Die führt uns in diesem Fall mit einem festem Bezugspunkt zu:

$$-\frac{s}{\tau(s)} = q'(\rho) = \rho v_e'(\rho) + v_e(\rho) = v + \rho v_e'(\rho).$$

Da aber unser mikroskopisches Modell ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegendes Fahrzeug als Referenzpunkt nimmt, erhalten wir:

$$-\frac{s}{\tau(s)} = q'(\rho) - v = \rho v_e'(\rho). \tag{4.5}$$

Außerdem gehen wir davon aus, dass diese Ausbreitungsgeschwindigkeit nur unerheblich variiert, falls wir uns nicht mit der Equilibriumsgeschwindigkeit bewegen[4].

4.1 Bemerkung. Für unsere einfache Verkehrsequilibriumsfunktion 2.2 gilt sogar $s/\tau(s) = id$.

Die Erkenntnis aus 4.5 können wir jetzt in unsere Gleichung 4.4 einsetzen und erhalten die zweite Gleichung des ARZ-Modells:

$$v_t + vv_x = -c(\rho)v_x = \rho v_e'(\rho)v_x.$$

Zusätzlich dazu gilt immer noch unsere Konservationsgleichung 2.1 und wir erhalten das vollständige ARZ-Modell:

$$\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v & \rho \\ 0 & v + v_e'(\rho)\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}_x = 0. \tag{4.6}$$

[4] Das ist der Hauptunterschied zwischen der Formulierung von Aw. und Rascle sowie Zhang. Erstere hatten stattdessen eine Verzögerungsfunktion p mit $p' > 0$ und $p(0) = 0$ in ihr Modell eingebaut. Die Formulierung von Zhang erlaubt es aber, das Modell schön auf das LWR-Modell zurückzuführen.

Im Moment kann das Modell aufgrund der hyperbolischen Form (wir zeigen gleich, dass es sich tatsächlich um ein hyperbolisches Modell handelt) so interpretiert werden, dass beim Verkehrsfluss die Dichte und die Geschwindigkeit bei einem Sprung erhalten werden. Ist das physikalisch sinnvoll?
Es ergibt sicherlich Sinn, die Dichte zu erhalten, da damit sichergestellt wird, dass keine Autos verschwinden oder erzeugt werden. Die folgende Analyse des Modells basiert aber nicht zu sehr auf der gewählten Erhaltungsform, die am besten an Messwerte angepasst wird und wir wählen daher im Einklang mit dem Erfinder des Modells als zweite Erhaltungsgröße $y = \rho(v - v_e(\rho))$.
Eine Umformulierung des Systems 4.6 ergibt uns also das ARZ-Modell in Erhaltungsform (eine ausführliche Umformung ist im Anhang unter 6.2 zu finden). Insbesondere ist jede stetige Lösung von 4.6 eine stetige Lösung von 4.7, andersum ist nur jede stetige Lösung von 4.7 mit $\rho > 0$ eine stetige Lösung von 4.6.

$$\begin{pmatrix}\rho\\ y\end{pmatrix}_t + F\begin{pmatrix}\rho\\ y\end{pmatrix}_x = 0 \iff \begin{pmatrix}\rho\\ y\end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix}\rho v\\ \rho v(v - v_e(\rho))\end{pmatrix}_x = 0, \tag{4.7}$$

wobei

$$F\begin{pmatrix}\rho\\ y\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y + \rho v_e(\rho)\\ \frac{y^2}{\rho} + y v_e(\rho))\end{pmatrix}.$$

4.2 Definition (Lösung des ARZ Modells)**.** Wir nennen eine Funktion $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t, x_1, x_2) \to (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2)) \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$ Lösung des ARZ-Modells zu den Anfangswerten $u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ falls :

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

und

$$u(0, x, y) = u_0(x, y)$$

4.3 Bemerkung. Das ARZ-Modell ist ein Modell des Aw-Rascle Types. Insbesondere gibt es eine Klasse an ähnlichen Verkehrsmodellen, die sich nur in der Wahl des Zusammenhangs zwischen der Dichte und der angestrebten Geschwindigkeit unterscheiden.

4.2 Untersuchung des ARZ Modells

Das ARZ-Modell ist eine echte Erweiterung des LWR-Models. Wenn wir v in der zweiten Gleichung nicht mehr als unabhängige Größe betrachten und es auf dem Equilibrium $v = v_e(\rho)$ fixieren, erhalten wird aus 4.6:

$$\begin{aligned} &v_e'(\rho)\rho_t + (v_e(\rho) + \rho v_e(\rho))v_e'(\rho)\rho_x = 0\\ \iff\ &v_e'(\rho)(\rho_t + (\rho v_e(\rho))_x) = 0. \end{aligned}$$

Da insbesondere per Annahme $V_*'(\rho) < 0$ gilt, erhalten wir das LWR-Modell.

4.4 Bemerkung (Nonequilibriumsmodell)**.** Dass LWR-Modell ist im Gegensatz zum ARZ-Modell ein Equilibriumsmodell. Das bedeutet, dass sich alle Verkehrsmodelle auf der Equilibirumskurve $(\rho, v(\rho))$ abspielen. Nonequilibriumsmodelle versuchen, diese Restrikton dadurch aufzuweichen, dass sie eine zweite Differentialgleichung einführen, die die Veränderung der Reisegeschwindigkeit angibt.

Wie sehen die Lösungen des Riemannproblems des ARZ-Modells aus? Wir gehen im ersten Schritt davon aus, dass sicherlich wie beim LWR-Modell Rarefaktionswellen auftreten können und beschreiben, unter welchen Bedingungen das passieren kann. Die Vorstellung orientiert sich am Kapital 8 von [18].

Zuerst ist eine Rarefaktionswelle in Analogie zum LWR-Modell eine selbstähnliche Lösung mit stetiger Geschwindigkeitsveränderung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq \xi_1 t \\ w(x/t) & \xi_1 t < x < \xi_2 t \\ u_r & x \leq \xi_1 t \end{cases}$$

wobei w eine passende Funktion ist mit $w(\xi_1) = u_l$ und $w(\xi_2) = u_r$ und wir annehmen, dass wir uns zur Vereinfachung nur auf der Integralkurve (in der Literatur auch Hugoniot-Lokus genannt) eines Eigenwertes bewegen. Wir gehen außerdem davon aus, dass diese Funktion wohldefiniert ist, es muss also insbesondere $u_l < u_r$ gelten ($<$ ist komponentenweise zu verstehen). Um w zu bestimmen, betrachten wir zuerst die Veränderung unserer Funktion in der Zeit:

$$u_t(x,t) = -\frac{x}{t^2} w'(x/t) \qquad u_x(x,t) = \frac{w'(x/t)}{t}$$

also mit der Erhaltungsfunktion:

$$-\frac{x}{t^2} w'(x/t) + \nabla F(w(x/t)) \frac{w'(x/t)}{t} = 0.$$

Eine Multiplikation mit t und Umsortieren ergibt uns:

$$\nabla F(w(\xi)) w'(\xi) = \xi w'(\xi)$$

Eine Lösung hierfür besteht in $w' = 0$, was aber nach Annahme an die Funktion w und $\xi_1 < \xi_2$ nicht zulässig ist. Wir sehen deshalb, dass $w'(\xi)$ proportional zu einem Eigenvektor von ∇F sein muss, w muss also auf einer Integralkurve von r_p liegen. Außerdem wissen wir durch die Anfangswerte, dass $\lambda_p(\xi)$ in Richtung des Eigenvektors monoton steigen muss (sonst entstehen wieder kleinere Schocks innerhalb der Welle). Diese Bedingung führt uns zum Begriff der echt nichtlinearen Felder. Sollte $\lambda_p(\xi)$ konstant sein, kann es keine Rarefaktionswelle geben, dies ist ein Spezialfall eines linear verschwindenden Eigenvektors, der Kontaktunstetigkeiten erzeugt.

4.5 Definition (echt nichtlineares Feld [5])**.** Wir nennen das i-te Feld eins hyperbolischen Systems 3.1 ($i \in \{1,2\}$) nichtlinear, falls für den Eigenwert λ_i und den dazugehörigen Eigenvektor r_i der Matrix ∇F gilt:

$$D\lambda_i(u) r_i(u) > 0.$$

4.6 Definition (linear verschwindend[6])**.** Wir nennen das i-te Feld eins hyperbolischen Systems 3.1 ($i \in \{1,2\}$) linear verschwindend, falls für den Eigenwert λ_i und den dazugehörigen Eigenvektor r_i der Matrix ∇F gilt:

$$D\lambda_i(u) r_i(u) = 0.$$

Für unser Modell 4.7 erhalten wir die Eigenwerte[7]:

$$\lambda_1 := \frac{y}{\rho} + Q_e'(\rho) = v + \rho v_e(\rho) \quad < \quad v = \frac{y}{\rho} + v_e(\rho) =: \lambda_2.$$

mit den Eigenvektoren

$$r_1 = \begin{pmatrix} -\rho \\ -y \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - v'(\rho)\rho - v(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v - Q_e'(\rho) \end{pmatrix}.$$

Das ist ein sehr erfreuliches Ergebnis!

[5] Englisch: Genuinely Nonlinear
[6] Englisch: Linearly Degenerate
[7] $Q_e = \rho v_e(\rho)$

Alle Eigenwerte des Systems 4.6 sind kleiner gleich der Fahrtgeschwindigkeit, das Problem der zu schnellen Informationsübertragung, das bei Systemen zweiter Ordnung auftritt und in der Einleitung von Sektion 4 angesprochen wurde entsteht hier nicht, und das Modell verhält sich wie erwartet.

Außerdem ist das erste Feld echt nichtlinear, da für unser Modell:

$$\nabla\lambda_1(\rho, y)r_1(\rho, y) = -\rho Q_e''(\rho) > 0$$

und das zweite Feld linear verschwindend, da

$$\nabla\lambda_2(\rho, y)r_2(\rho, y) = 0.$$

Wir erwarten also beim zweiten Eigenwert Kontaktunstetigkeiten wie im Intermezzo, insbesondere keine Rarefaktionswellen oder Stöße.

4.7 Definition (Schwache Lösung des ARZ Modells)**.** Wir nennen eine Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (t, x_1, x_2) \to (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$ schwache Lösung des ARZ-Modells zu den Anfangswerten $u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ falls für jede Testfunktion:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} u_1\phi_t + F(u)\phi_x dx_1 dx_2 dt = -\int_{\mathbb{R}^2} (u_0)_1(x)\phi(x, 0)dx_1 dx_2$$

sowie

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} u_2\phi_t + F(u)\phi_x dx_1 dx_2 dt = -\int_{\mathbb{R}^2} (u_0)_2(x)\phi(x, 0)dx_1 dx_2$$

gilt und die erweiterten Rankine-Hugoniot Bedingungen für alle Unstetigkeiten erfüllt sind.

Da jede klassische Lösung ebenfalls eine schwache Lösung des Modells ist reden wir jetzt nur noch von Lösungen des Modells.

4.8 Definition (Kontaktunstetigkeit)**.** Wir nennen die Unstetigkeit mit der Geschwindigkeit $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ einer schwachen Lösung u des ARZ-Modells Kontaktunstetigkeit, falls das sie erzeugende Feld linear verschwindend ist.

Kann es sein, dass sich beim ARZ-Modell wie beim LWR-Modell nach endlicher Zeit trotz stetiger Anfangswerte Unstetigkeiten entwickeln? Um zu zeigen, dass unser LWR-Modell nicht stetige Lösungen besitzt, hatten wir mit einem geometrischen Argument gezeigt, dass sich Charakteristiken kreuzen. Dies war besonders leicht, da alle unsere Charakteristiken affin linear waren.

Um zu zeigen, dass ebenfalls bei unserem ARZ-Modell nicht stetige Lösungen existieren müssen wir also ein Pendant der Charakteristiken für unser nichtlineares System finden. Dafür führen wir die Riemanninvariante ein, eine Funktion, die auf den Eigenvektoren des Systems konstant ist. Bei unserem linearen System entsprechen die Riemanninvarianten genau den Orthogonalen der Eigenvektoren (es gibt also für ein hyperbolisches n- dimensionales System $n - 1$ linear unabhängige Riemanninvarianten).
Es ergibt Sinn, dass dies nur möglich ist, falls unsere Unstetigkeiten entweder echt nichtlinear oder linear verschwindend sind. Folgende Überlegungen orientieren sich an Kapitel 6 aus [1].

4.9 Definition (Riemanninvariante)**.** Eine Funktion $RI : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt Riemanninvariante für ein n-dimensionales hyperbolisches System 3.1 zu einem Eigenwert r_i von ∇F, oder i Riemanninvariante (RI_i), falls

$$\nabla(RI_I)(t)r_i(\nabla(RI_I), t) = 0, t \in [0, \infty).$$

Diese Riemanninvarianten waren im Intermezzo einfach Linien mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich λ_i, d. h

$$Ri_1(t) = \alpha_1 + tr_2 \text{ und } Ri_2(t) = \alpha_2 + tr_1.$$

Wir können jetzt die Struktur unseres 2-dimensionalen Systems ausnutzen, und erhalten, dass die Riemanninvarianten zu einem Eigenwert ebenfalls linke Eigenwerte zum jeweils anderen Eigenwert sind (für einen Beweis, siehe Lemma 6.4):

$$\nabla Ri_1 \nabla F = \lambda_2 \nabla Ri_1. \tag{4.8}$$

Wir möchten jetzt zeigen, dass Riemanninvarianten auf bestimmten Kurven konstant sind. Sei dafür $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige Kurve mit $s' = (1, \lambda_2(s))^T$, die wir Charakteristik nennen. Es gilt aufgrund des ARZ-Modells 4.7 und 4.8:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Ri_1(u(s(t)))}{\partial t} &= \nabla(Ri_1 \circ u)(s)\nabla s \\ &= (\nabla Ri_1)(u(s))u_t s_t + (\nabla Ri_1)(u(s))\lambda_2(s,t)u_x s_x \\ &= s_t((\nabla Ri_1)(u(s))(u_t + A(t,x)u_x) = 0.\end{aligned}$$

Wir haben also eine Methode gefunden, um Kurven zu finden auf denen die Lösung konstant ist. Um jetzt zu zeigen, dass Unstetigkeiten auftreten müssen wollen wir zeigen, dass manche Charakteristiken eine unbeschränkte Ableitung nach x haben. Dies geschieht durch geschicktes Kombinieren der Gleichungen in 4.9.

Im folgenden wollen wir zur Vereinfachung der Notation $w := Ri_1$ und $z := Ri_2$ benutzen. Wenn wir jetzt w (z) nach $(1, \lambda_1)^T$(bzw. $(1, \lambda_2)^T$) ableiten, erhalten wir

$$(w)' = w_t + \lambda_1 w_x = 0 \text{ sowie } (z)^* = z_t + \lambda_2 z_x = 0, \tag{4.9}$$

wobei $'$ und * eben die Ableitungen in die Richtung $(1, \lambda_1)^T$ bzw. $(1, \lambda_2)^T$ bezeichnen. Wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen nach x ableiten, erhalten wir:

$$w_{tx} + \lambda_1 w_{xx} + (\lambda_1)_w w_x^2 + (\lambda_1)_z w_x z_x = 0.$$

Hierbei haben wir λ_1 als Funktion von w und z betrachtet und die Kettenregel angewendet.
Wir setzen jetzt $p := w_x$ und erhalten aus der zweiten Gleichung 4.9[8]:

$$p' + (\lambda_1)_w p^2 + \frac{(\lambda_1)_z}{\lambda_1 - \lambda_2} z' p = 0 \tag{4.10}$$

wobei $'$ wieder die Ableitung in Richtung $(1, \lambda_1)$ bezeichnet.
Sei jetzt h eine von w und z abhängige Funktion mit:

$$h_z = \frac{(\lambda_1)_z}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Da $w' = 0$ gilt erhalten wir

$$h' = h_w w' + h_z z' = \frac{\rho_z}{\rho_1 - \rho_2} z'.$$

Wenn wir diese in 4.10 einsetzen erhalten wir:

$$p' + (\lambda_1)_w p^2 + h' p = 0$$

Wir wenn diese Gleichung jetzt mit e^h multiplizieren und

$$q := e^h p \qquad k := e^{-h}(\lambda_1)_w$$

[8] $z' = z_t + \lambda_1 z_x$ und $z_t + \lambda_2 z_x = 0 \implies z' = z_x(\lambda_1 - \lambda_2)$

setzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$q' + kq^2 = 0.$$

Diese können wir analytisch lösen:

$$q(t) = \frac{q_0}{1 + q_0 K(t)} \tag{4.11}$$

wobei

$$q_0 := q(0)$$

und

$$K(t) = \int_0^t k dt, \quad (t \geq 0).$$

Die Frage, ob 4.11 beschränkt bleibt, hängt davon ab, ob $q_0 K(t)$ den Wert -1 annehmen kann. Wenn wir jetzt OBdA $(\lambda_1)_w > 0$ und $|w|, |z| < M$ (dies ist tatsächlich nur eine Bedingung an die Anfangswerte, da die Funktion auf den Riemanninvarianten konstant ist) annehmen, erhalten wir, dass $k = e^{-h}(\lambda_1)_w$ von unten beschränkt ist, also:

$$K(t) \geq k_0 t \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Es folgt, dass $q(t)$ in endlicher Zeit unbeschränkt wird, falls $q_0 < 0$, bzw. die Anfangswerte irgendwo sinken. Insbesondere erhalten wir eine unbeschränkte Ableitung der Lösung. Dies fordert für ein beschränktes System die Existenz von Unstetigkeiten.
Wie in unserem ersten Modell kann man also nicht für beliebige stetige Anfangswerte in stetige Lösungen auf $t \in [0, \infty)$ finden, die Definiton der schwachen Lösung ist also unbedingt notwendig.

Wir suchen jetzt eine Erweiterung der bekannten Entropiebedingungen auf Systeme, die sicherstellt dass es keine Lösungen gibt, die Informationen erzeugen.

Auf der einen Seite wollen wir sicherstellen, dass wie im skalaren Fall keine Charakteristiken aus der Unstetigkeit austreten, also keine neuen Informationen erzeugt werden. Dies entspricht für die Geschwindigkeit s einer Unstetigkeit mit den Werten $u_r(u_l)$ rechts (links) davon:

$$\lambda_k(u_r) < s < \lambda_k(u_l)$$

Außerdem wollen wir sicherstellen, dass es Unstetigkeiten immer nur zwischen zwei Feldern von benachbarten Eigenwerten vorkommen kann:

$$\lambda_{k-1}(u_l) < s < \lambda_{k+1}(u_r).$$

Dies ist daher wichtig, da damit sichergestellt werden kann dass $k+n-(k+1) = n-1$ Bedingungen an die Werte links und $(n-k)+k-1 = n-1$ Bedingungen an die Werte rechts der Unstetigkeit u gestellt werden, die mit der ersten Bedingung an die Stoßgschwindigkeit eine eindeutige Zuordnung der Werte auf den Charakteristiken ermöglicht. Dies entspricht wieder dem Verständnis von Entropie, bei dem keine Informationen erzeugt werden.
Diese Bedingungen können jetzt auch als Beschränkung an die Stoßgeschwindigkeit s gestellt werden, was uns zu den Stoßbedingungen von Lax für zweidimensionale Systeme führt.

4.10 Definition (1,2-Stöße[9]). Sei $k \in \{1, 2\}$ und seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von ∇F eines hyperbolischen Systems 3.1. Wir nennen eine Unstetigkeit $k-$Stoß, falls für die Geschwindigkeit s gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_k(u_r) <& s < \lambda_{k+1}(u_r) \\ \lambda_{k-1}(u_l) <& s < \lambda_k(u_l), \quad \lambda_0 \equiv -\infty, \quad \lambda_3 \equiv -\infty. \end{aligned}$$

[9] auch Stoßbedingung von Lax (Lax shock condition) genannt

4.11 Bemerkung (lokale Lösbarkeit des Riemannproblems)**.** Tatsächlich besitzen alle hyperbolischen Systeme unter Voraussetzung der Lax-Entropiebedingung für nah beieinanderliegende Anfangswerte für das Riemannproblem eine Lösung, wenn sie ausschließlich echt nichtlineare oder linear verschwindende Eigenwerte besitzen. Ein ausführlicher Beweis hierfür ist z.B, bei [8] Theorem 17.18 zu finden.

4.12 Bemerkung. Wir haben im LWR Modell immer eine Funktion f mit $f'' > 0$ behandelt. Das liegt daran, dass im skalaren Fall ein konvexes f eine nichtlineare Unstetigkeit sicherstellt, und wir sonst keine Existenzaussagen treffen können.

4.3 Das Riemannproblem für das ARZ-Modell

Das folgende Kapitel stellt Inhalte aus [2] vor. Im folgenden wollen wir einige Riemannprobleme analytisch lösen. Wir benutzten dazu das (im Vergleich zur quadratischen Funktion leicht nach links geschobene) fundamentale Diagramm in Abb. 15.

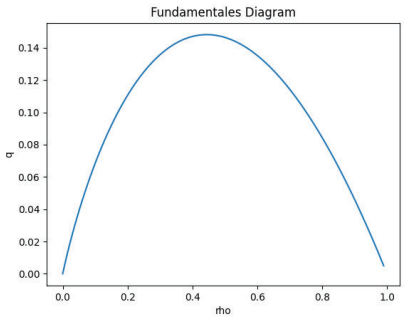


Abbildung 15: fundamentales Diagram für das Riemannproblem, $v_e(\rho) = 1 - \rho^{0.5}$

Wenn wir jetzt das Riemannproblem für zwei beliebige zulässige Anfangswerte u_l und u_r betrachten, erwarten wir aufgrund der Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Charakteristiken, dass es zuerst einen $1-$Schock- oder Rarefaktionswelle gibt, der den linken Zustand mit einem Zwischenzustand verbindet und dann eine $2-$Kontaktunstetigkeit, die diesen Zustand mit dem rechtem Zustand verbindet. Wenn wir erlaubte Lösungen für die Bedingung der Stoßgeschwindigkeit betrachten, erhalten wir durch die Rankine-Hugoniot Bedingung (siehe Lemma 6.3 und analoge Überlegungen für die Kontaktunstetigkeit) den Zwischenzustand:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_e(\rho_0) + (v_l - v_e(\rho_l)) \\ v_0 &= v_r, \end{aligned} \tag{4.12}$$

beziehungsweise nach Umstellen zu ρ_0,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= v_e^{-1}(v_r - v_l + v_e(\rho_l))) \\ v_0 &= v_r. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Wie sieht in diesem praktischem Fall unsere Lax-Stoßbedingung aus? Anders gefragt, wann erwarten wir Stöße und wann Rarefaktionswellen? Ein 1-Stoß korrespondiert zu der Bedingung, dass

$$\lambda_1(u_l) > \lambda_1(u_0) \iff v_l + \rho_l v_e(\rho_l) > v_0 + \rho_0 v_e(\rho_0).$$

Da außerdem aufgrund 4.12

$$v_0 - v_l = v_e(\rho_0) - v_e(\rho_l)$$

gilt folgt für Stöße $\rho_l > \rho_0$, was uns aufgrund der Monotonie von v_e zu $v_l > v_0$ führt. Wir unterscheiden einige Fälle und geben die Lösung des Riemannproblems an:

(i) 1. Fall: $0 \leq v_r - \underbrace{v_l + v_e(\rho_l)}_{=:c} \leq v_{max}$. Dies ist der Fall. in dem wir unsere Anfangswerte direkt verbinden können. Insbesondere ist $v_e^{-1}(c)$ wohldefiniert.

(a) $v_r \leq v_l$: Es gibt also einen 1−Stoß, der u_l mit dem Zwischenzustand u_0 verbindet und eine 2-Kontaktunstetigkeit, die u_0 mit u_r verbindet. Dies ist in Abb. 16 visualisiert.

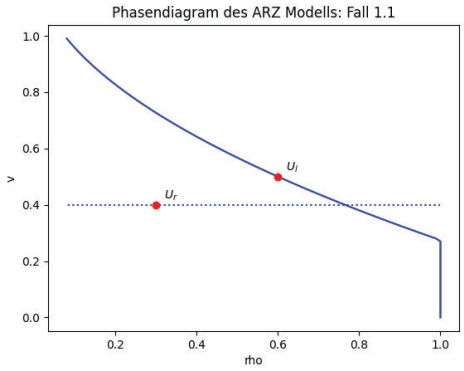


Abbildung 16: Lösung des Riemannproblems im Fall 1.1

(b) $v_r > v_l$: Es gibt also eine 1−Rarefaktionswelle, die u_l und u_0 verbindet und eine 2-Kontaktunstetigkeit, die u_0 mit u_r verbindet. Dies ist in Abb. 17 visualisiert.

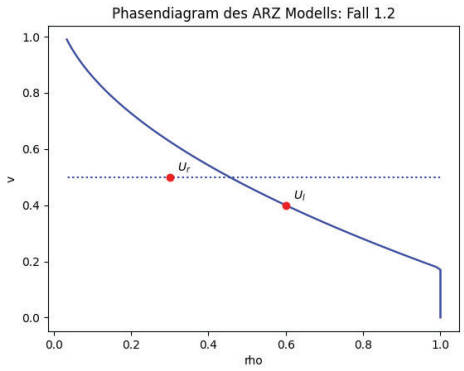


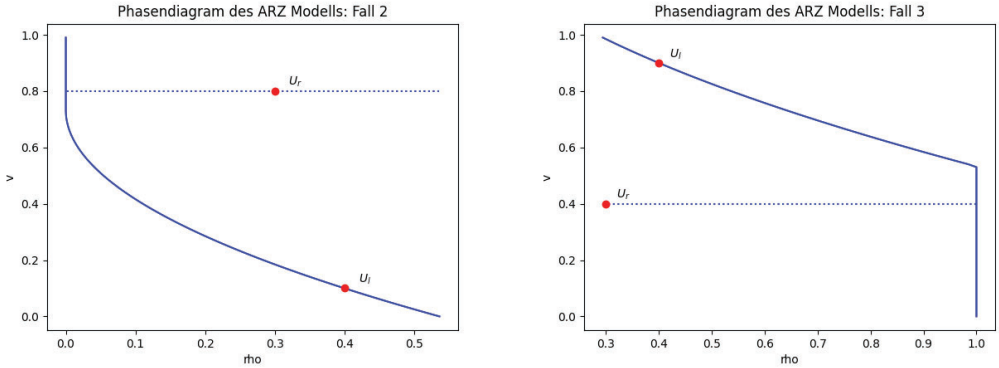
Abbildung 17: Lösung des Riemannproblems im Fall 1.2

(ii) Fall 2: $v_r - \underbrace{v_l + v_e(\rho_l)}_{=:c_1} > V_{max}$ und Fall 3: $v_r - \underbrace{v_l + v_e(\rho_l)}_{=:c_2} < 0$. In diesen beiden Fällen ist die Umkehrfunktion v_e^{-1} an den Stellen c_1 und c_2 nicht wohldefiniert. Dieser Makel lässt sich aber durch eine Erweiterung der Umkehrfunktion beheben:

$$v_e^{-1}(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v \geq v_{max} \\ \rho_{max} & \text{falls } v \leq 0 \\ v_e^{-1}(x) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Es treten im Fall 2 (18a) zwei Zwischenzustände auf. Zuerst wird der Punkt u_l mit einer Rarefaktionswelle zum Punkt $(0, v_{max} + v_l - v_e(\rho_l))$ verbunden, Dieser Punkt wird dann mit eine weitere Rarefaktionswelle über das Vakuum zu Punkt $(0, v_r)$ verbunden. Von dort gibt es dann eine 2-Kontaktunstetigkeit zum Punkt U_r. Im drittem Fall gibt es den Zwischenzustand u_0 mit $u_0 = (\rho_{max}, v_{max} + v_l - v_e(\rho_{max}))$.

Diese Erweiterung kann auch als eine Beschränkung der Charakteristiken interpretiert werden, so dass deren Integralkurven im physikalisch zulässigem Bereich



(a) Lösung des Riemannproblems im Fall 2 (b) Lösung des Riemannproblems im Fall 3

Abbildung 18: Lösung des Riemannproblems nach Erweiterung des fundamentalen Diagramms; Visualisierung in der (ρ, v)-Phasenebene

bleiben. Wenn wir unsere Erhaltungsfunktion $y = \rho(v - v_e(\rho))$ betrachten, lässt sich feststellen dass bei $\rho = 0$ ebenfalls $y = 0$ gilt und die Information über die Geschwindigkeit in der (ρ, y) Betrachtung verloren geht. Dies bedeutet insbesondere, dass wir für diese Zustände in unserem (ρ, v)-Phasendiagram sinnvolle Zwischenzustände wählen können, ohne die Erhaltungsgleichung zu verletzen.

Für eine weitere mathematische Behandlung dieser Probleme wollen wir hier auf [2] verweisen.

4.4 Kommentar zur Numerischen Approximation

Wenn wir unser Modell jetzt auf ein echtes Problem anwenden wollen, reicht es nicht nur das Riemannproblem zu behandeln und wir benötigen ein numerisches Schema zur Approximation von Lösungen des ARZ-Modells. Es wird kurz gezeigt, dass das im ersten Teil benutze Lax-Friedrich Schema, obwohl es bei dem skalaren Problem sinnvolle Werte ergeben hat, für das ARZ -Modell unbrauchbar ist. Wir betrachten hierfür die Verallgemeinerung der 1-dimensionalen Lax-Friedrich Methode mit kanonischer Diskretisierung auf dem Rechteck $[0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{bmatrix} \rho_i^{n+1} \\ q_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i^{n} \\ q_i^{n} \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\begin{bmatrix} (F_\rho)_{i+1}^n \\ (F_q)_{i+1}^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (F_\rho)_{i-1}^n \\ (F_q)_{i-1}^n \end{bmatrix} \right)$$

wobei F wie in 4.7 definiert ist:

$$\begin{bmatrix} (F_\rho)_i^n \\ (F_q)_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} - h(\rho)q \end{bmatrix}.$$

Außerdem setzten wir für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{k}{n} << 1$:

$$\Delta t := \frac{1}{n}, \quad \Delta x := \frac{1}{k}$$

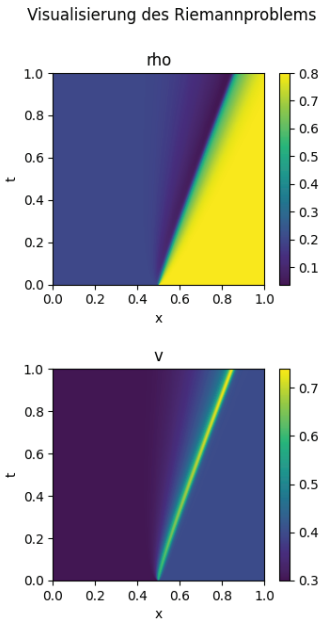


Abbildung 19: Visualisierung einer (fehlerhaften) Simulation mit dem Lax-Friedrich Schema

Es stellt sich heraus, dass dieses Schema keine Kontaktunstetigkeiten simulieren kann: Wenn wir eine Simulation für das Riemannproblem mit $u_l = (0.2, -0.24)$ und $u_r = (0.8, 0.24)$ sowie den Randwerten $u(t,0) = u_l$, $u(t,1) = u_r$ durchführen erhalten wir die offensichtlich falsche, in Abb. 19 visualisierte Lösung (siehe die "schnelle" Charakteristik im unterem Diagram). Diese Problem

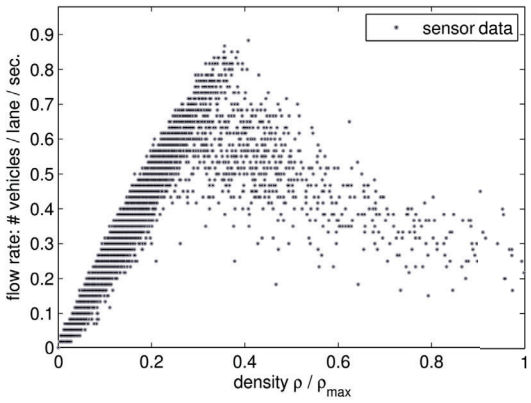


Abbildung 20: verbessertes Fundamentales Diagram. Diese Abbildung ist exakt aus [17] übernommen und dort als "Figure 2" zu finden.

bleibt bei sehr kleinen Schrittweiten bestehen und stellt ein strukturelles Problem dieser Methode dar, weshalb das Lax-Friedrich Schema für unser Problem ungeeignet ist.
Tatsächlich war es im ersten Schritt verwunderlich, dass wir zur Simulation einer unstetigen Lösung ein finites Differenzverfahren benutzen konnten, das auf der Stetigkeit der Lösung beruht. Es hatte trotzdem funktioniert, da wir die Entropielösung als Grenzwert einer viskosen Lösung betrachten konnten, die gut vom Lax-Friedrich Schema approximiert werden konnte.

Um das ARZ-Modell numerisch zu simulieren muss also ein anderes Verfahren benutzt werden. In der Literatur wird häufig das Godunovschema angewandt, das auf der Idee beruht die Anfangswerte zu diskretisieren und an jedem Übergang ein Riemannproblem zu lösen. Eine Einführung und Untersuchung des selben würde aber, wenn auch sehr interessant, den Umfang dieser Arbeit sprengen.

4.5 Fehler des ARZ Modells

Das ARZ-Modell besitzt einige Ungenauigkeiten, die in weiteren Arbeiten verbessert wurden. Um die Grenzen des Modells aufzuzeigen, werden daher die wichtigsten vorgestellt:

1. Wenn wir das Modell mit den Anfangsdaten $0 < \rho_0 << 1$ und $0 < v_0 << v_e(\rho)$ betrachten, verbleibt die Lösung des Modells in diesem Zustand. Wir erwarten aber, dass sich durch die niedrige Dichte die Geschwindigkeit bis auf die optimale Geschwindigkeit erhöht. Dieses Problem kann durch einen Relaxationsterm gelöst werden. Ein interessantes Phänomen dieses verbesserten Modells wird kurz in 4.6 vorgestellt. Dies ist auch der Grund, warum es keinen Sinn ergibt eine Lösung dieses Modells mit der Lösung des Ampelproblems des LWR-Modells zu vergleichen.

2. Die Annahme, dass es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Dichte und angestrebten Geschwindigkeit gibt, ist nicht unbedingt klar. Mit den Daten des Department of Transportation in Minnesotta [17] lässt sich wie in Abb. 20 ein verbessertes fundamentales Diagramm erstellen, das nicht unbedingt eine wohldefinierte Funktion darstellt.

3. Wie beim LWR-Modell gibt es in Verkehrssituationen keine Unstetigkeiten, sondern nur sehr schnelle Übergänge. Es stellt sich also wie beim LWR-Modell die grundsätzliche Frage, inwieweit hyperbolische Systeme zur Staumodellierung geeignet sind.

4.6 Jamitons

Wenn man eines der größten Problem des ARZ-Modells beheben möchte, nämlich die Tatsache, dass es keine selbstständige Beschleunigung der Autos gibt, sondern immer nur einen Ausgleich, bietet es sich an das ARZ-Modell 4.7 mit einem Quellterm zu versehen. Diese Modell ist als inhomogenes ARZ-Modell bekannt und soll hier kurz genannt werden. Es lautet in der bekannten Notation mit einem Relaxationsterm $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : h' < 0$ und $h'' > 0$:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v + h(\rho) \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v \\ v(v + h(\rho) \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau}(v_e(\rho) - v) \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Diese Modell "beschleunigt" offensichtlich zur Equilibriumsgeschwindigkeit. Jetzt sollte man meinen, dass dies alle auftauchenden stehenden Wellen ausgleicht, man also eine wünschenswerte Eigenschaft des ARZ-Modells stehende Wellen zu simulieren verliert, aber nein!
Wie B.Seibold, M.R. Flynn, A.R. Kasimov, und R.Rosales in [17] herausgefunden haben, gibt es bei diesem inhomogenen ARZ Modell 4.14 ebenfalls stehende Wellen.

Dies liegt daran, dass es unter bestimmten Bedingungen durch die zusätzliche Verzögerungszeit der Fahrer eine selbsterhaltende Welle entstehen kann. Die Existenz dieser Welle ist direkt mit der Stabilität des Systems verknüpft.
Tatsächlich gibt es sogar eine feste Größe, die diese Jamitons anstreben. Dieses Phänomen lässt sich auch als Fahrer bei Verkehrssituation bemerken, in denen ein "Stop-and-Go" Verkehr auftritt, und ebendiese Wellen streben sogar eine feste Zwischengröße an. Dieses Phänomen wird mathematisch in [13] untersucht. Die Beschreibung dieser Jamitons würde aber eine nähere Untersuchung des inhomogenen ARZ-Modells voraussetzen, auf die hier aus Platzgründen verzichtet wird.

5 Abschluss

Die Verkehrsmodellierung mit hyperbolischen Systemen hat ein großes Potential, da sie es erlaubt sehr komplexe Zusammenhänge mit verhältnismäßig einfachen Gleichungen zu beschreiben. Mit dem einfachem LWR-Modell konnten schon sinnvolle Aussagen über das Aufstauen vor einer roten Ampel getroffen und Empfehlungen zur Länge der verschiedenen Ampelphasen gegeben werden.

Das ARZ-Modell behebt einige strukturelle Fehler des LWR-Modells, ohne aber auf die günstige Struktur von hyperbolischen Systemen zu verzichten. Der nächste Schritt in der weiteren Untersuchung des Nutzens hyperbolischer Erhaltungssysteme würde darin bestehen, weitere numerische Verfahren für das ARZ-Modell zu simulieren, insbesondere dass in 6.1 implementierte Verfahren mathematisch zu untersuchen. Die Ergebnisse müssten dann auf der einen Seite mit echten Daten aus dem Straßenverkehr, als auch auf der anderen Seite mit den Ergebnissen des LWR-Modells zu verglichen werden. Dies würde eine weitere Aussage über die Qualität der Modelle geben.
Auf die Grundannahme, dass es keine Ein-oder Ausfahrten gibt muss verzichtet werden und das Verhalten von Straßennetzen untersucht werden. Nicht desto trotz stellen die hier vorgestellten Überlegungen die Basis aller weiteren Untersuchungen vor. Persönlich würde es mich auch interessieren, das Phänomen des Phantomstaus/der Jamitons weiter zu untersuchen, auf das ich hier nicht weiter eingehen konnte und mich im Zuge dessen mit dem inhomogenen ARZ-Modell beschäftigen.

6 Anhang

6.1 Code

Diverser Code mit Erklärungen ist unter https://github.com/BernhardEisvogel/ CodeARZModel oder hier zu finden. Dort ist auch eine numerische Implementierung des ARZ-Modells mit Hilfe des Godunovschemas, was hauptsächlich eine Umsetzung des in [2] vorgestellten Schemas mit unser einfachen Equilibriumsfunktion $v_e(\rho) = 1 - \rho$ darstellt. Obwohl weder die Ergebnisse noch das Godunovschema dort mathematisch untersucht werden, lohnt sich ein Blick.

6.2 Kleine Lemmata

6.1 Lemma. *Die Funktionenschar 2.8 erfüllt tatsächlich die Rankine-Hugoniot Bedingung und ist eine Lösung des LWR-Systems 2.4 für* $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Beweis: Es genügt, die Stoßbedingung bei allen Stöße zu überprüfen. Wir nehmen an, dass $s_m < u_m$. Sonst treten keine Stoßbedingungen auf und die Rankine-Hugoniot Bedingungen sind trivialerweise erfüllt.
Da es nur eine Unstetigkeit gibt, genügt:

$$\frac{f(u(s_m t - 0, t)) - f(u(s_m t + 0, t))}{u(s_m t - 0, t) - u(s_m t + 0, t)} = \frac{u_l^2/2 - u_m^2/2}{u_l - u_r} = \frac{u_l + u_m}{2} = s_m.$$

6.2 Satz. *Die beiden Formulierugen 4.6 und 4.7 des ARZ-Modells sind äquivalent, d.h. ihre stetigen Lösungen sing gleich, falls* $\rho > 0$.

Beweis: Wir können das Modell 4.6 in folgende zwei Gleichungen umschreiben:

$$\begin{aligned} A &: \rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0 \\ B &: v_t + (v + v_e'(\rho)\rho)v_x = 0. \end{aligned}$$

Wir möchten zeigen, dass Lösungen hiervon ebenfalls Lösungen des Modells 4.7 (und vice versa) sind, also von folgendem System aus Gleichungen:

$$\begin{aligned} A' &: \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ B' &: y_t + (\rho v(v - v_e(\rho))_x = 0. \end{aligned}$$

wobei $y = \rho(v - v_e(\rho))$.
Es ist klar, dass A und A' äquivalent sind. Wir schreiben jetzt Gleichung B' um:

$$\begin{aligned} & y_t + (\rho v(v - v_e(\rho))_x = 0 \\ \iff & \rho_t(v - v_e(\rho)) + \rho(v_t - v_e'(\rho)\rho_t) + (\rho v)_x(v - v_e(\rho)) + (\rho v)(v - v_e(\rho))_x = 0 \\ \iff & \underbrace{(v - v_e(\rho))(\rho_t + (vp)_x)}_{=0 \text{ aufgrund von A'}} + \rho v_t - \rho\rho_t v_e'(\rho) + vpv_x - v\rho v_e'(\rho)\rho_x = 0 \\ \iff & \rho v_t + \rho v_e'(\rho)(\rho v)_x + vpv_x - v\rho v_e'(\rho)\rho_x = 0 \\ \iff & \rho v_t + \rho v_e'(\rho)\rho v_x + \rho v_e'(\rho)\rho_x v + vpv_x - v\rho v_e'(\rho)\rho_x = 0 \\ \iff & \rho(v_t + (v + \rho v_e'(\rho))v_x) = 0 \end{aligned}$$

6.3 Lemma (verbindbare Eigenwerte mit einem 1-Stoß)**.** *Falls für die Zustände* $u_l = (y_1, \rho_1)$,$u_r = (y_0, \rho_0)$ *mit* $y_1 > y_0$

$$\frac{y_1}{\rho_1} = \frac{y_0}{\rho_0}$$

gilt, sind sie mit einem $1-$*Stoß verbindbar.*

Beweis: Die Zustände $u_l = (y_1, \rho_1)$ und $u_r = (y_0, \rho_0)$ sind genau dann mit einem 1-Stoß verbindbar, wenn für ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(u_r) < s < \lambda_1(u_l)$ gilt, dass

$$\begin{pmatrix} y_1 + \rho_1 v_e(\rho_1) \\ y_1^2/\rho_1 + y_1 v_e(\rho_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 + \rho_0 v_e(\rho_0) \\ y_0^2/\rho_0 + y_0 v_e(\rho_0) \end{pmatrix} = s \left(\begin{pmatrix} \rho_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right).$$

Wir setzen ein und erhalten:

$$\begin{pmatrix} y_1 + \rho_1 v_e(\rho_1) \\ y_1 \frac{y_0}{\rho_0} + \rho_1 \frac{y_0}{\rho_0} v_e(\rho_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 + \rho_0 v_e(\rho_0) \\ y_0^2/\rho_0 + \rho_0 \frac{y_0}{\rho_0} v_e(\rho_0) \end{pmatrix} = s \left(\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 \frac{y_0}{\rho_0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_0 \frac{y_0}{\rho_0} \end{pmatrix} \right).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} s &= \frac{(y_1 - y_0) + (\rho_1 v_e(\rho_1) - \rho_0 v_e(\rho_0))}{\rho_1 - \rho_0} \\ &= \frac{v_1 \rho_1 - v_0 \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \end{aligned}$$

Wir prüfen jetzt die erweiterte Entropiebedingung von Lax:

1. $s < \lambda_2(u_r)$ Wir benutzen $v_e' \leq 0$ und erhalten mit der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} s &= v_0 - v_e(\rho_0) + \frac{\rho_1 v_e(\rho_1) - \rho_0 v_e(\rho_0)}{\rho_1 - \rho_0} \\ &< v_0 \end{aligned}$$

2. $\lambda_1(u_r) < s < \lambda_1(u_l)$: Es gilt für ein $\xi_1 \in [p_0, p_1]$ und da $q'' < 0$:

$$\begin{aligned} s &= v_1 - v_e(\rho_1) + \frac{\rho_1 v_e(\rho_1) - \rho_0 v_e(\rho_0)}{\rho_1 - \rho_0} \\ &= v_1 - v_e(\rho_1) + (\rho v_e(\rho))'(\xi_1) \\ &= v_1 - v_e(\rho_1) + \rho_1 v_e'(\rho_1)) + v_e(\rho_1) < \lambda_1(u_l). \end{aligned}$$

Die andere Seite funktioniert analog.

6.4 Lemma (Lemma der rechten und linken Eigenwerte)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ als Eigenwerten sowie r_1, r_2 als rechte Eigenvektoren. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^2$:*

$$\langle x, r_1 \rangle = 0 \implies x^T A = \lambda_1 r_2^T.$$

Beweis: Wir wissen, dass wir A umschreiben können als:

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

wobei Λ die Diagonalmatrix der Eigenwerte ist und S die Matrix mit den Eigenvektoren als Spalten.:

$$\begin{aligned} x^T A &= x^T S \Lambda S^{-1} \\ &= (0, x^T r_2)(\lambda_1 r_1, \lambda_2 r_2)^T \\ &= x^T \lambda_2. \end{aligned}$$

Literatur

[1] Peter Lax (1973); Hyperbolic Systems of Conservation Laws

[2] Salim Mammar, Jean-Patrick Lebacque, Habib Jaj Salem (2009); Riemann Problem Resolution and Godunov Scheme for the Aw-Rascle-Zhang Model

[3] G.B. Whitham (1974); Linear and Nonlinear Waves

[4] A.Aw, M.Rascle (1998); Resurrection of Traffic Flow

[5] Chandler, R. E., Herman, R., and Montroll, E. W. (1958). Traffic dynamics: Studies in car following. Operations Research, 6, 165–184. https://doi.org/10.1287/opre.6.2.165

[6] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., and Sugiyama, Y. (1995). Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. Physical Review E, 51, 1035. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.1035

[7] Burghout, W. (2004). Hybrid Microscopic-Mesoscopic Traffic Simulation. PhD diss., Royal Institute of Technology.

[8] Joel Smoller (1967); Shock Waves and Reaction Diffusion Equations

[9] G.B. Whitham (1979), Lectures on Wave Propagation

[10] Martin Treiber, Arne Kesting (2013); Traffic FlowDynamics

[11] P. Cardaliaguet, N. Forcadel (2019); From heterogeneous microscopic traffic flow models to macroscopic models

[12] Ansgar Jüngel (2002);Modeling and Numerical Approximation of Traffic Flow Problems

[13] R. Ramadan, R.R. Rosales, B. Seibold (2019); Structural properties of the stability of jamitons

[14] Harold Greenberg (1959); An Analysis of Traffic Flow

[15] H.M. Zhang (1997); A theory of nonequilibrium traffic flow

[16] H.M. Zhang (2002); A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior

[17] Benjamin Seibold, Morris. R. Flynn, Alsan R. Kasimov, Rodolfo Ruben Rosales (2013); Constructing set-valued fundamental diagrams from jamiton solutions in second order traffic models

[18] Randall J. LeVeque (2013); Numerical Methods for Conservation Laws

[19] G.Warnecke (1999); Analytische Methoden in der Theorie der Erhaltungsgleichungen

Alle Abbildungen wurden falls nicht explizit gekennzeichnet selbst erstellt.